А. КИСЕЛЕВЪ.

КРАТКАЯ АЛГЕБРА
для
ЖЕНСКИХЪ ГИМНАЗІЙ
и
ДУХОВНЫХЪ СЕМИНАРІЙ.

СО МНОГИМИ ПРИМѢРАМИ И УПРАЖНЕНІЯМИ.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ИЗДАНІЕ.

Ученымъ Ком. Мин. Нар. Просв. **допущена** въ качествѣ **руководства** для женскихъ гимназій („Журн. М. Н. Пр.", декабрь, 1916).

Рекомендована Учебн. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ **учебника** по алгебрѣ предпочтительно передъ другими („Церк. Вѣд.". 1897 г., № 10).

Цѣна 2 руб. 30 коп.

ИЗДАНІЕ
„Т-ва В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ".

МОСКВА, Большая Лубянка, д. № 15/17. || ПЕТРОГРАДЪ, Большая Конюшенная, № 1.

1917

Предисловіе къ 16-му изданію.

Главнѣйшія особенности этого изданія состоятъ въ слѣдующемъ.

Нѣсколько подробнѣе, чѣмъ прежде, изложены главнѣйшія свойства дѣленія относительныхъ чиселъ (§ 37).

Въ § 62, содержащемъ извѣстныя формулы умноженія двучленовъ, для бо́льшей вразумительности добавлены къ каждой формулѣ числовые примѣры.

Обстоятельнѣе, чѣмъ прежде, изложено (§ 75) основное свойство дроби, что величина ея не измѣнится, если оба члена мы умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, отличное отъ нуля.

Въ § 84 («Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій») добавлена задача 2-я (на смѣшеніе второго рода) съ цѣлью въ самомъ началѣ главы объ уравненіяхъ показать учащимся, какъ иногда ариѳметическія задачи весьма просто сводятся на рѣшеніе уравненія.

Упрощено изложеніе двухъ основныхъ истинъ о равносильности уравненій (§§ 86 и 87).

Изложеніе рѣшенія квадратнаго уравненія (§§ 127—131, соотвѣтствующіе прежнимъ §§ 132—136) теперь сдѣлано болѣе конкретнымъ, а именно, ранѣе рѣшенія уравненія въ общемъ буквенномъ видѣ указывается рѣшеніе нѣкоторыхъ примѣровъ уравненій съ числовыми коэффиціентами и только послѣ этого пріемы рѣшенія обобщаются на буквенныя уравненія.

Къ § 129 (прежнему § 134) добавлено «замѣчаніе», въ которомъ указывается на примѣрѣ, что корни квадратнаго уравненія не всегда вычисляются точно (конечно, въ области раціональныхъ чисе́лъ).

Нѣсколько улучшено изложеніе о безконечной геометрической убывающей прогрессіи (§§ 144, 145, соотвѣтствующіе прежнимъ §§ 160, 161).

Для сокращенія по возможности объема книги (что особенно важно въ настоящее время при непомѣрной дороговизнѣ бумаги и типографской работы) въ настоящемъ

изданіи мы выпустили нѣкоторые §§ и главы, которые въ «краткой» алгебрѣ излишни; таковы: основанное на формулѣ квадрата многочлена возвышеніе въ квадратъ цѣлыхъ чиселъ (прежній § 113), такъ какъ такое возвышеніе весьма просто выполняется помощью обыкновеннаго умноженія; глава объ отношеніи и пропорціи (прежніе §§ 139—149), такъ какъ объ этомъ съ достаточною полнотою говорится въ курсахъ ариѳметики, и, наконецъ, извлеченіе кубичныхъ корней изъ чиселъ (прежніе §§ 168—177), такъ какъ это дѣйствіе едва ли теперь гдѣ либо проходится. Конечно, выпущены также и соотвѣтственные №№ упражненій.

Вслѣдствіе указанныхъ сокращеній и измѣненій пришлось измѣнить нумерацію параграфовъ.

Изъ предисловій къ предыдущимъ изданіямъ.

Къ 1-му изданію. Предлагаемая «Краткая алгебра» составлена примѣнительно къ программамъ духовныхъ семинарій по плану моей «Элементарной алгебры» (седьмое изданіе), одобренной Ученымъ Комитетомъ Мин. Нар. Пр. въ качествѣ руководства для гимназій и реальныхъ училищъ и рекомендованной Учебнымъ Комитетомъ при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія. Книжка содержитъ въ себѣ только то, что полагается пройти въ курсѣ духовныхъ семинарій; сверхъ того она содержитъ многіе примѣры, упражненія и задачи, расположенные систематически по параграфамъ учебника. Вслѣдствіе такого расположенія преподаватель можетъ къ каждому уроку задавать ученикамъ упражненія, прямо относящіяся къ содержанію объясненнаго въ классѣ. Составляя упражненія и задачи (главнымъ образомъ по французскимъ руководствамъ: *L. Launay*—Elèments d'Algèbre, *Bourget*—Cours d'Algèbre, *Ch. Vacquant*—Elèments d Algèbre, *Hue et Vagnier*—Algèbre, *Ritt*—Problémes d'Algèbre и другимъ), я старался избѣгать слишкомъ сложныхъ комбинацій, имѣя въ виду, что отъ воспитанника духовной семинаріи достаточно требовать *усвоенія лишь* главнѣйшихъ основъ алгебры, а не навыка въ сложныхъ практическихъ примѣненіяхъ. Количество прилагаемыхъ упражненій, какъ кажется, вполнѣ достаточно для этой цѣли; ученики, про-

ходящіе алгебру по этому руководству, могутъ обойтись безъ особаго задачника по этому предмету.

Ко 2-му изданію. Это изданіе представляетъ собою повтореніе перваго (съ устраненіемъ замѣченныхъ опечатокъ) и, кромѣ того, **дополнено** нѣкоторыми новыми статьями, а именно: простѣйшіе случаи уравненій, приводимыхъ къ квадратнымъ или къ уравненіямъ первой степени, извлеченіе кубичныхъ корней изъ чиселъ, дѣйствія надъ радикалами, обобщеніе понятія о показателѣ и логариѳмы съ нѣкоторыми примѣненіями. Помѣщая эти статьи, мы преслѣдовали двѣ цѣли: 1) сдѣлать учебникъ годнымъ для употребленія **въ женскихъ гимназіяхъ** Мин. Нар. Просвѣщенія и вообще въ учебныхъ заведеніяхъ съ курсомъ алгебры, болѣе краткимъ, чѣмъ въ мужскихъ гимназіяхъ, и 2) дать возможность любознательнымъ ученикамъ духовныхъ семинарій (напр., поступающимъ въ университеты) дополнить свои свѣдѣнія по математикѣ самыми важными элементами алгебры, не прибѣгая къ другому руководству по этому предмету. Дополненія, какъ и всѣ статьи собственно курса духовныхъ семинарій, изложены по возможности просто и кратко и снабжены достаточнымъ количествомъ упражненій.

Къ 12-му изданію. 12-е изданіе «Краткой алгебры» въ двухъ первыхъ своихъ отдѣлахъ («Предварительныя понятія» и «Первыя четыре алгебраическія дѣйствія») значительно измѣнено въ соотвѣтствіи съ переработаннымъ 23-мъ изданіемъ нашей «Элементарной алгебры» (вышедшемъ въ 1911 г.). Измѣненію, главнымъ образомъ, подверглось изложеніе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Характеръ этого измѣненія указанъ въ слѣдующихъ словахъ предисловія къ упомянутому 23-му изданію:

«Прежняя, искусственно введенная, условность въ изложеніи чиселъ отрицательныхъ теперь устранена; въ настоящемъ изданіи числа эти разсматриваются конкретно, какъ символы для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», т.-е. такихъ величинъ, которыя могутъ быть понимаемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Хотя въ такомъ видѣ изложеніе теряетъ ту краткость, которую оно имѣло

прежде, но зато оно въ значительной степени выигрываетъ въ ясности и въ легкости усвоенія; да и потеря въ краткости отчасти вознаграждается тѣми сокращеніями въ дальнѣйшемъ курсѣ (при изложеніи первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій и изслѣдованія уравненій), какія возможно было ввести, благодаря болѣе подробному изложенію отрицательныхъ чиселъ».

«Изложеніе какъ чиселъ отрицательныхъ, такъ и ирраціональныхъ, ведется нами все время при помощи графическаго представленія чиселъ на числовой прямой и, слѣд., иллюстрируется соотвѣтствующими наглядными чертежами».

Къ 13-му изданію. Для этого изданія были тщательно просмотрѣны и исправлены всѣ отвѣты на задачи и упражненія и устранены всѣ замѣченныя опечатки; кромѣ того, добавлены нѣкоторыя новыя задачи (напр., №№ 583—588).

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предварительныя понятія.

Стр.

Первыя четыре алгебраическія дѣйствія.

Уравненія первой степени.

Степени и корни.

Прогрессіи.

— — —

ДОПОЛНЕНІЯ.

Нѣкоторыя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ 1-й степени.

Предварительныя понятія.

Алгебраическое знакоположеніе.

1. Употребленіе буквъ. Если желаютъ указать, какъ рѣшаются задачи, сходныя между собою по условіямъ, но различающіяся только величиною данныхъ чиселъ, то обыкновенно поступаютъ такъ: обозначаютъ данныя числа буквами (латинскаго или французскаго алфавита и, разсуждая совершенно такъ, какъ если бы данныя были выражены числами, указываютъ посредствомъ знаковъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами и въ какой послѣдовательности, чтобы получить искомое число. При этомъ, обозначивъ одно число какою-нибудь буквою, другія числа обозначаютъ иными буквами, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ. Пусть, напр., мы желаемъ указать, какъ находятся процентныя деньги съ даннаго капитала за данное время. Тогда предлагаемъ задачу въ такомъ общемъ видѣ:

a руб. отданы въ ростъ по p%: опредѣлить процентныя деньги за t лѣтъ.

Капиталъ отданъ по p% (*напр., по* 5%); *это значитъ*, что каждый рубль приноситъ въ годъ дохода $p/_{100}$ руб. (т.-е. p копѣекъ); поэтому a рублей принесутъ въ годъ дохода $p/_{100} \times a$ (руб.), а въ t лѣтъ этотъ доходъ будетъ

$p/_{100} \times a \times t$ (руб.). Значитъ, обозначивъ искомыя процентныя деньги буквою x (руб.), мы можемъ написать:

$$x = \frac{p}{100} \times a \times t.$$

Изъ этого выраженія видно, что для рѣшенія задачи надо число процентовъ раздѣлить на 100 и полученное частное умножить на число рублей капитала и на число лѣтъ, за которое требуется вычислить процентныя деньги. Напр., процентныя деньги съ 3720 руб., отданныхъ по 4% на $5^1/_2$ лѣтъ, будутъ:

$$x = \frac{4}{100} \times 3720 \times \frac{11}{2} = \frac{4 \times 3720 \times 11}{100 \times 2} = 818 \text{ р. } 40 \text{ коп.}$$

2. Алгебраическое выраженіе. Совокупность чиселъ, изъ которыхъ всѣ или нѣкоторыя выражены буквами и которыя соединены посредствомъ знаковъ, указывающихъ, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо произвести надъ этими числами, называется алгебраическимъ выраженіемъ. Таково, напр., выраженіе:

$$\frac{p}{100} \times a \times t.$$

Вычислить алгебраическое выраженіе для данныхъ численныхъ значеній буквъ значитъ подставить въ него на мѣсто буквъ данныя числа и произвести указанныя дѣйствія; число, получившееся послѣ этого, наз. **численною величиною** алгебраическаго выраженія.

3. Тождественныя выраженія. Алгебраическія выраженія наз. тождественными, если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ они имѣютъ одну и ту же численную величину. Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{p}{100} \times a \times t \text{ и } \frac{p \times a \times t}{100}.$$

4. Предметъ алгебры. Алгебра прежде всего указываетъ способы, посредствомъ которыхъ можно одно алгебраическое выраженіе преобразовать въ другое, тождественное ему. Цѣль такого преобразованія различна:

1) упрощеніе алгебраическаго выраженія, т.-е. замѣна одного выраженія другимъ, содержащимъ меньшее число дѣйствій или болѣе простыя дѣйствія;

2) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для обнаруженія какихъ-либо свойствъ его;

3) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для запоминанія.

О другой задачѣ алгебры будетъ сказано впослѣдствіи (§ 84).

5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ. **Сложеніе** есть дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько данныхъ чиселъ *соединяются въ одно число*, называемое ихъ суммою.

Вычитаніе есть дѣйствіе (обратное сложенію), посредствомъ котораго по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному слагаемому (вычитаемому) отыскивается другое слагаемое (остатокъ или разность).

Умноженіе на цѣлое число есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число (множимое) повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ (во множителѣ); **умноженіе на дробь** есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такая дробь множимаго, какую множитель составляетъ отъ единицы.

Дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствамъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному сомножителю (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Возвышеніе въ степень есть дѣйствіе, посредствомъ котораго находится произведеніе нѣсколькихъ одинаковыхъ сомножителей; это произведеніе называется **степенью**, а число одинаковыхъ сомножителей—**показателемъ степени**. Такъ, возвысить 2 въ четвертую степень, значитъ найти произведеніе 2 . 2 . 2 . 2=16; 16 есть четвертая степень 2-хъ, 4—показатель этой степени. Вторая степень называется иначе **квадратомъ**, третья—**кубомъ**. Первою степенью числа принято называть само это число.

Извлеченіе корня есть дѣйствіе (обратное возвышенію въ степень), посредствомъ котораго по данной степени и данному показателю этой степени находится возвышаемое число. Напр., извлечь изъ 8 корень третьей степени значитъ найти число, которое, возвышенное въ 3-ю степень, составляетъ 8; такое число есть 2, потому что 2 . 2 . 2=8; корень второй степени изъ 100 есть 10, потому что 10 . 10=100. Корень второй степени называется иначе квадратнымъ, а корень третьей степени—кубичнымъ.

6. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ. Для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій въ алгебрѣ употребляются тѣ же знаки, какъ и въ ариѳметикѣ; только знакъ умноженія обыкновенно не пишется, если оба сомножителя, или одинъ изъ нихъ, выражены буквами; напр., вмѣсто того, чтобы писать $a \cdot b$ (или $a \times b$), обыкновенно пишутъ ab, и вмѣсто $3 \cdot a$ (или $3 \times a$) просто $3a$.

Возвышеніе въ степень обозначается такъ: пишутъ возвышаемое число и надъ нимъ, съ правой стороны, помѣщаютъ показателя степени; напр., выраженіе 2^4 означаетъ, что 2 возвышается въ 4-ю степень. При всякомъ числѣ можно подразумѣвать показателя 1; напр., a все равно, что a^1, потому что первою степенью числа называютъ само это число.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$; подъ его горизонтальной чертой пишутъ то число, изъ котораго надо извлечь корень, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; напр., выраженіе $\sqrt[3]{8}$ означаетъ корень 3-й степени изъ 8. Впрочемъ, квадратный корень принято писать безъ показателя, т.-е. такъ: $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ и т. д.

Какъ знаки соотношеній между численными величинами *употребительны:* знакъ **равенства** $=$ и знакъ **неравенства** $>$, обращаемый отверстіемъ угла къ бо́льшему числу. Напр., выраженія:

$$5+2=7;\ 5+2>6;\quad 5+2<10$$

означаютъ: 5+2 равно 7; 5+2 больше 6; 5+2 меньше 10.

Иногда помѣщаются два знака другъ подъ другомъ; напр., выраженія:

$$1)\ a\geqslant b;\quad 2)\ a\lesseqgtr b;\quad 3)\ a\pm b$$

означаютъ: 1) a больше или равно b; 2) a больше или меньше b; 3) a плюсъ или минусъ b.

Употребительны еще знаки $\neq$, $\not>$, $\not<$, получаемые перечеркиваніемъ знаковъ равенства или неравенства. Такое перечеркиваніе означаетъ отрицаніе того значенія, которое придается знаку неперечеркнутому. *Такъ, знакъ* $\neq$ *означаетъ:* «не равно», знакъ $\not>$ означаетъ «не больше» и т. п.

7. Формула. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ равенства или неравенства, образуютъ формулу.

Напр., *при рѣшеніи задачи*, указанной въ параграфѣ первомъ, мы получили такую формулу:

$$x=\frac{p}{100}\times a\times t.$$

8. Скобки. Если желаютъ выразить, что, совершивъ какое-либо дѣйствіе, надо надъ полученнымъ результатомъ произвести снова какое-либо дѣйствіе, то обозначеніе перваго дѣйствія заключаютъ въ скобки. Напр., выраженіе:

$$20-(10+2)$$

означаетъ, что изъ 20 вычитается не 10, а сумма отъ сложенія 10 съ 2; слѣд., при вычисленіи этого выраженія надо сначала сложить 10 и 2 (получимъ 12) и затѣмъ полученную сумму вычесть изъ 20 (получимъ 8).

Когда приходится заключить въ скобки такое выраженіе, въ которомъ уже есть скобки, то новымъ скобкамъ придаютъ другую форму для отличія ихъ отъ прежнихъ. Напр., выраженіе:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означаетъ, что изъ d вычитается e, полученная разность прикладывается къ c, полученная сумма вычитается изъ b и на эту разность умножается a.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ принято скобки опускать. Напр., скобки не ставятся при обозначеніи послѣдовательныхъ сложеній, вычитаній, умноженій; такъ:

вмѣсто $[(a+b)+c]+d$ пишутъ $a+b+c+d$;
» $[(a-b)+c]-d$ » $a-b+c-d$;
» $[(ab)c]d$ » $abcd$.

Въ этихъ случаяхъ порядокъ дѣйствій указывается самимъ выраженіемъ (слѣва направо).

Упражненія.

Къ § 1.

1. Капиталъ a руб. отданъ въ ростъ по p%. Опредѣлить процентныя деньги за t дней (считая въ году 360 дней, какъ это принято въ коммерческихъ вычисленіяхъ).

2. Смѣшано три сорта чаю: перваго сорта a фунт., второго b фунт. и третьяго c фунт.; фунтъ перваго сорта стоитъ m руб., второго сорта n руб. и третьяго сорта p руб. Опредѣлить цѣну фунта смѣси.

3. Вексель въ 3500 руб. учтенъ за 48 дней до срока по 8%. Опредѣлить учетъ и сумму, уплаченную по векселю (годъ=360 дней).

Вексель въ a руб. учтенъ за t дней до срока по p%. Опредѣлить учетъ и сумму, уплаченную по векселю.

Къ § 6.

4. Выразить посредствомъ знаковъ, принятыхъ въ алгебрѣ: 1) сумму чиселъ a, b и c; 2) разность чиселъ m и n; 3) произведеніе чиселъ p, q и r; 4) квадратъ числа x, кубъ числа y; 5) корень квадратный изъ числа a, корень кубичный изъ числа b; 6) сумму квадратовъ чиселъ x и y; 7) произведеніе квадрата числа m на кубъ числа n.

Къ § 8.

5. Найти численныя величины слѣдующихъ выраженій при $a=25$, $b=8$ и $c=3$; 1) $(a+b)c$, 2) $(a+b)(a-b)$, 3) $\frac{a+b}{c}$, 4) $(a+b):(b+c)$, 5) a^2+b^3, 6) $(a+b)^2$, 7) a^2+b^2, 8) $\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}$.

6. Провѣрить слѣдующія равенства при $a=10$, $b=2$:

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; 2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

7. Вычислить слѣдующія выраженія при $x=100$, $y=20$:

1) $x-\{y+[x+y-(x-y)]+2\}$

2) $xy+[x^2-(x-y)^2]$.

8. Выразить посредствомъ алгебраическихъ знаковъ: 1) разность квадратовъ чиселъ a и b; 2) квадратъ разности чиселъ a и b; 3) произведеніе суммы чиселъ a и b на ихъ разность; 4) частное отъ дѣленія суммы кубовъ чиселъ a и b на куб. суммы этихъ чиселъ.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

9. Свойства сложенія и умноженія. Изъ свойствъ этихъ дѣйствій укажемъ слѣдующія:

1°. **Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.**

Напр., сумма $7+3+2$ равна 12; если измѣнимъ порядокъ слагаемыхъ, напр., такъ: $3+2+7$, то получимъ все ту же сумму 12.

Свойство это въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ мы можемъ выразить такою буквенною формулой (обозначая буквами a, b и c какія-нибудь три числа):

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=\ldots$$

Это свойство называется **перемѣстительнымъ,** такъ какъ оно состоитъ въ неизмѣняемости суммы отъ перемѣщенія слагаемыхъ.

2°. **Сумма не измѣнится, если какія-нибудь слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммою.**

Напр., сумма $12+3+7$, равная $15+7$, т.-е. числу 22, не измѣнится, если въ ней какія-нибудь слагаемыя (не только первыя два) замѣнимъ ихъ суммой; напр., если замѣнимъ слагаемыя второе и третье ихъ суммой, то получимъ: $12+(3+7)=12+10=22$.

Свойство это называется **сочетательнымъ,** такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что нѣсколько слагаемыхъ, не измѣняя суммы, мы можемъ сочетать (соединять) въ одно число.

Въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ сочетательное свойство мы можемъ выразить такой формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа налѣво, т.-е. такъ: $a+(b+c)=$ $=a+b+c$, мы можемъ высказать то же сочетательное свойство въ другой словесной формѣ:

чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое суммы одно за другимъ.

3°. **Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.**

Такъ: $2 \cdot \frac{5}{7} \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot 3 \cdot 2 = \ldots$

Вообще: $abc = acb = cab = \ldots$

Это **перемѣстительное свойство** умноженія доказывается въ ариѳметикѣ сначала для цѣлыхъ чиселъ, а затѣмъ и для дробей.

4°. **Произведеніе не измѣнится, если какихъ-нибудь сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.**

Напр., произведеніе $7 \cdot 2 \cdot 5$, равное $14 \cdot 5$, т.-е. числу 70, останется безъ измѣненія, если какихъ-нибудь сомножителей (не только первые два) мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ; напр., если замѣнимъ сомножителей второго и третьяго ихъ произведеніемъ, то получимъ: $7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$.

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ сомножителей это **сочетательное** свойство умноженія можно выразить такимъ равенствомъ:

$$abc = a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же сочетательное свойство выразить иначе:

чтобы умножить какое-нибудь число (a) на произведеніе (bc), достаточно умножить это число на перваго сомножителя, результатъ умножить на второго сомножителя и т. д.

5°. **Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.**

Такъ, чтобы умножить сумму $300+20+5$ (т.-е. число 325) на 8, достаточно, какъ мы знаемъ изъ ариѳметики,

умножить на 8 отдѣльно 300, 20 и 5 и полученныя числа сложить.

Это свойство произведенія называется **распредѣлительнымъ,** такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что дѣйствіе умноженія, производимое надъ суммой, можно распредѣлить на каждое слагаемое.

Въ примѣненіи къ суммѣ двухъ слагаемыхъ это свойство можно выразить такой формулой:

$$(a+b)c=ac+bc.$$

Такъ какъ произведеніе не мѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, то формулу эту можно писать и такъ:

$$c(a+b)=ca+cb.$$

Поэтому распредѣлительное свойство иногда высказываютъ такъ: **чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.**

10. Свойства вычитанія и дѣленія.

Изъ свойствъ, принадлежащихъ обратнымъ дѣйствіямъ, укажемъ слѣдующія:

1°. **Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа сумму, достаточно отнять отъ этого числа каждое слагаемое одно за другимъ.**

Такъ: $20-(3+8+2)=20-3-8-2.$

Вообще: $a-(b+c+d)=a-b-c-d.$

Это свойство можно принять за очевидное.

2°. **Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу разность, достаточно прибавить къ этому числу уменьшаемое и вычесть вычитаемое.**

Такъ: $8+(5-3)=8+5-3.$

Дѣйствительно, если второе слагаемое увеличимъ на 3, то-есть вмѣсто 5—3 возьмемъ 5, то получимъ сумму 8+5;

но отъ увеличенія слагаемаго на 3 сумма увеличивается также на 3; слѣд., искомая сумма должна быть меньше суммы 8+5 на 3; значитъ, она будетъ 8+5—3.

Вообще $a+(b-c)=a+b-c$.

3°. **Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа разность, достаточно прибавить къ этому числу вычитаемое и затѣмъ отнять уменьшаемое.**

Такъ: 4—(5—2)=4+2—5.

Дѣйствительно, если мы увеличимъ уменьшаемое и вычитаемое на 2, то разность не измѣнится; но тогда уменьшаемое будетъ 4+2, а вычитаемое 5; слѣд., разность будетъ 4+2—5.

Вообще $a-(b-c)=a+c-b$.

4°. **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго, потомъ на третьяго и т. д.**

Такъ, чтобы раздѣлить 400 на произведеніе трехъ сомножителей 4 . 2 . 5, можно раздѣлить 400 на 4 (найдемъ 100), полученное число раздѣлить на 2 (найдемъ 50) и, наконецъ, полученное отъ этого дѣленія число раздѣлить на 5 (найдемъ 10).

Вообще $a:(bcd)=[(a:b):c]:d$.

5°. **Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число какого-либо одного сомножителя, оставивъ другого безъ измѣненія.**

Такъ, чтобы раздѣлить произведеніе 10 . 8 на 2, достаточно раздѣлить на 2 или 10, или 8; въ первомъ случаѣ получимъ 5 . 8=40 и во второмъ случаѣ 10 . 4=40.

Вообще $(ab):c=(a:c)b=a(b:c)$.

11. Примѣненіе этихъ свойствъ. Указанныя свойства позволяютъ дѣлать нѣкоторыя простѣйшія преобразованія алгебраическихъ выраженій; приведемъ этому примѣры:

1) $a+b+a+2+b+a+8=(a+a+a)+(b+b)+(2+8)=$
$=a\ .\ 3+b\ .\ 2+10=3a+2b+10.$

2) $a+(b+a)=a+b+a=(a+a)+b=2a+b.$

3) $a.(3xxa)\ .\ (4ay)=a\ .\ 3\ .\ x\ .\ x\ .\ a\ .\ 4\ .\ a\ .\ y=$
$=(3\ .\ 4)(aaa)(xx)y=12a^3x^2y.$

4) $a^3a^2=(aaa)(aa)=aaaaa=a^5.$

5) $(a+x+1)\ .\ 3=(a\ .\ 3)+(x\ .\ 3)+3=3a+3x+3.$

6) $x(ax^2+x)=x(ax^2)+xx=xaxx+xx=a(xxx)+xx=ax^3+x^2.$

7) $m+(a-m)=m+a-m=a+m-m=a.$

8) $p-(q-p)=p+p-q=2p-q.$

9) $\frac{9ab}{3}=\frac{9}{3}ab=3ab.$

Упражненія.

9. Упростить слѣдующія выраженія (объяснить, какими свойствами приходится пользоваться въ каждомъ примѣрѣ)

$a+b+a+b+a$; $x+(a-x)$; $x-(x-y)$;
$a+(a+b)-(b-a)$; $a(ax)$; $5aaabbxxxx$;
$10a^3b^4 : 2ab$; $3x^2y\ .\ 2x$; $15ab : 5$; $15a^3b : a^2$.

Положительныя и отрицательныя числа.

12. Понятіе о величинахъ, имѣющихъ направленіе. Переходя отъ ариѳметики къ алгебрѣ, мы прежде всего займемся расширеніемъ понятія о числѣ съ цѣлью имѣть возможность выражать посредствомъ чиселъ величины особаго рода, примѣры которыхъ мы приведемъ въ слѣдующихъ двухъ задачахъ.

Задача 1. Когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Москву съ Петроградомъ) находился на разстояніи 100 верстъ отъ станціи Бологое (эта станція лежитъ приблизительно посрединѣ между Москвой и Петроградомъ), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ на разстояніи 50 верстъ отъ Бологова. На какомъ разстояніи находились тогда эти два поѣзда другъ отъ друга?

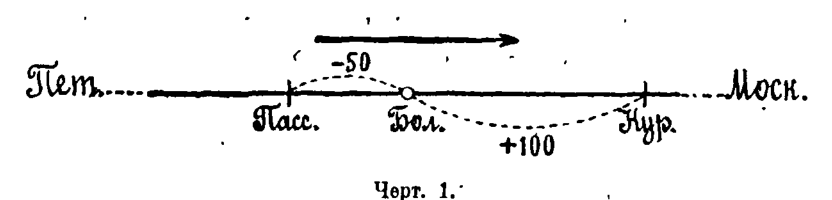
Въ такомъ видѣ задача эта представляется не вполнѣ опредѣленной: въ ней не сказано, находились ли поѣзда по одну сторону отъ Бологова, напримѣръ, въ сторону по направленію къ Петрограду, или же они были по разнымъ сторонамъ отъ Бологова. Если первое, то разстояніе между поѣздами было, очевидно, 100—50, т.-е. 50 верстъ, а если второе, то это разстояніе было 100+50, т.-е. 150 верстъ. Значитъ, для того, чтобы эта задача была опредѣленною, недостаточно задать величину разстоянія поѣздовъ отъ Бологова, но еще нужно указать, въ какомъ направленіи эти разстоянія надо считать отъ Бологова.

Мы имѣемъ здѣсь примѣръ величины, въ которой, кромѣ ея размѣра, можно разсматривать еще **направленіе**; это— разстояніе, считаемое по какой-нибудь линіи (напр. по желѣзной дорогѣ) отъ опредѣленнаго на ней мѣста (напр., отъ станціи Бологое). Разстояніе это можно считать и въ одномъ направленіи (напр., къ Москвѣ), и въ другомъ, противоположномъ (напр., къ Петрограду). Обыкновенныя (ариѳметическія) числа недостаточны для выраженія и размѣра, и направленія разстояній. Условимся въ подобныхъ случаяхъ поступать такъ.

Назовемъ какое-нибудь одно изъ двухъ направленій Николаевской дороги (напр., направленіе отъ Петрограда къ Москвѣ) положительнымъ, а противоположное напра-

вленіе (отъ Москвы къ Петрограду) отрицательнымъ сообразно этому разстоянія, считаемыя въ положительномъ направленіи, будемъ называть положительными разстояніями, а разстоянія, считаемыя въ отрицательномъ направленіи, будемъ называть отрицательными. Первыя будемъ выражать числами со знакомъ + (или вовсе безъ знака), а вторыя—числами со знакомъ —. Такъ, если поѣздъ находится въ мѣстѣ, отстоящемъ на 100 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, то мы будемъ говорить, что его разстояніе отъ Бологова равно + 100 вер. (или просто 100 вер.); если же поѣздъ находится, положимъ, на 50 вер. отъ Бологова по направленію къ Петрограду, то мы скажемъ, что его разстояніе отъ Бологова равно—50 вер. Здѣсь знаки + и —, конечно, не означаютъ дѣйствій сложенія и вычитанія, а только служатъ условно для обозначенія направленій.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ: когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги находился отъ Бологова на разстояніи +100 вер. (или просто 100 вер.),



Черт. 1.

тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ отъ Бологова на разстояніи—50 вер. Какъ велико было тогда разстояніе между этими поѣздами? Теперь задача выражена вполнѣ точно, и отвѣтъ на нее получается опредѣленный (см. черт. 1, на которомъ стрѣлка указываетъ положительное направленіе дороги): поѣзда находились на разстояніи 100 +50, т. е. 150 верстъ.

Задача 2. Термометръ въ полночь показывалъ 2 градуса, а въ полдень 5 градусовъ. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

И въ этой задачѣ условія выражены недостаточно полно; надо еще указать, 2 градуса тепла или 2 градуса холода показывалъ термометръ въ полночь, т.-е. вершина ртутнаго столбика въ термометрѣ была въ полночь на 2 дѣленія выше, или на 2 дѣленія ниже той черты, на которой стоитъ 0°; подобныя же указанія должны быть сдѣланы и относительно температуры въ полдень. Если и въ полночь, и въ полдень термометръ указывалъ тепло, то температура за этотъ промежутокъ времени повысилась отъ 2 до 5 градусовъ, значитъ, измѣнилась на 3 градуса; если же въ полночь термометръ указывалъ 2 градуса холода (ниже 0°), а въ полдень 5 градусовъ тепла (выше 0°), то температура повысилась на 2+5, т.-е. на 7 градусовъ. Могло случиться и такъ, что въ полночь температура была 2° холода и въ полдень 5° тоже холода (тогда температура не повысилась, а понизилась на 3 градуса), или такъ, что въ полночь температура была 2° тепла, а въ полдень 5° холода (тогда температура понизилась на 7 градусовъ).

Въ этой задачѣ тоже рѣчь идетъ о величинѣ, имѣющей направленіе: число градусовъ температуры можно отсчитывать вверхъ отъ нулевой черты термометра и внизъ отъ нея. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ +, а температуру ниже 0° (холодъ) считать отрицательной и обозначать числомъ градусовъ со знакомъ — (не будетъ недоразумѣнія, если первое число брать совсѣмъ безъ знака). Напр., если говорятъ, что термометръ на воздухѣ показываетъ —2°, а въ комнатѣ +12° (или просто 12°), то мы понимаемъ, что въ первомъ случаѣ вершина ртутнаго

столбика стоитъ ниже 0° на 2 дѣленія, а во второмъ случаѣ выше 0° на 12 дѣленій.

Выразимъ теперь нашу задачу, примѣрно, такъ: термометръ въ полночь показывалъ —2°, а въ полдень +5°. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня? Въ такомъ видѣ задача получаетъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ: температура повысилась на 2+5, т.-е. на 7 градусовъ.

Кромѣ величинъ, указанныхъ въ этихъ двухъ задачахъ, многія другія также имѣютъ «направленіе», т.-е. онѣ могутъ быть разсматриваемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Таковы, напримѣръ:

доходъ	въ противоположномъ	смыслѣ	будетъ	расходъ;
выигрышъ	»	»	»	проигрышъ;
прибыль	»	»	»	убытокъ;
имущество	»	»	»	долгъ и т. п.

Если доходъ, выигрышъ, прибыль, имущество... условимся считать величинами положительными и выражать ихъ числами со знакомъ + (или безъ знака), то расходъ, проигрышъ, убытокъ, долгъ... надо считать соотвѣтственно величинами того же рода, но отрицательными, и выражать ихъ числами со знакомъ —; тогда можно говорить, что расходъ есть отрицательный доходъ, проигрышъ есть отрицательный выигрышъ и т. д. При такомъ соглашеніи понятны будутъ, напр., слѣдующія словесныя выраженія: купецъ получилъ прибыли: въ январѣ +200 руб., въ февралѣ +150, въ мартѣ —50 рублей (значитъ, въ мартѣ купецъ получилъ убытку 50 руб.); или такія: у старшаго брата имущества было на +50000 руб., у средняго на +30000 руб., у младшаго на—5000 руб. (значитъ, у младшаго брата не было совсѣмъ имущества, а былъ долгъ въ 5000 руб.).

Должно однако замѣтить, что на ряду съ указанными величинами существуетъ очень много другихъ, въ которыхъ нельзя указать «направленія»; напр., нельзя понимать въ двухъ противоположныхъ смыслахъ такія величины, какъ объемъ, площадь, вѣсъ и многія другія.

13. Относительныя числа. Числа, разсматриваемыя въ ариѳметикѣ, служатъ для выраженія такихъ величинъ, которыя не имѣютъ «направленія», или которыхъ направленіе не разсматривается (когда, напр., интересуются знать только размѣръ какого-нибудь разстоянія, а не направленія, по которому его надо считать). Числа же, разсматриваемыя въ алгебрѣ, служатъ для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», когда, помимо размѣра величины, хотятъ еще указать и ея направленіе. Для этого величину, понимаемую въ какомъ-нибудь одномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ $+$, а ту же величину, понимаемую въ противоположномъ смыслѣ, выражаютъ числомъ съ предшествующимъ ему знакомъ $-$.

Число съ предшествующимъ ему знакомъ $+$ (который, впрочемъ, можетъ быть и опускаемъ) наз. **положительнымъ**; число съ предшествующимъ ему знакомъ $-$ наз. **отрицательнымъ**. Такъ, $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0{,}3$ положительныя числа, а -8, $-\frac{5}{7}$, $-3{,}25$ отрицательныя числа. Къ числамъ присоединяютъ еще 0 (нуль), не относя его ни къ положительнымъ, ни къ отрицательнымъ. Выраженія $+0$, -0 и просто 0 считаютъ равносильными.

Числа положительныя, отрицательныя и нуль мы будемъ называть **относительными** числами (или **алгебраическими**[1])

[1]) Должно замѣтить однако, что въ высшей математикѣ терминъ «алгебраическое число» употребляется въ другомъ значеніи, о которомъ въ элементарной алгебрѣ говорить не приходится.

въ отличіе отъ чиселъ **обыкновенныхъ** (или **ариѳметическихъ**), которыя не имѣютъ передъ собой никакого знака.

Абсолютною величиною относительнаго числа называется это число, взятое безъ знака; такъ, абсолютная величина числа —10 есть 10, абсолютная величина числа +5 есть 5; абсолютная величина нуля есть 0.

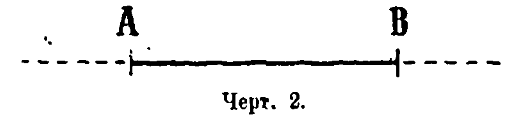
Два относительныхъ числа считаются **равными**, если у нихъ одинаковы абсолютныя величины и знаки; въ противномъ случаѣ числа считаются неравными.

Должно помнить, что знаки + и —, входящіе въ обозначеніе относительныхъ чиселъ, не представляютъ собою знаковъ сложенія и вычитанія, а служатъ лишь знаками для указанія «направленія» измѣряемыхъ величинъ. Чтобы не могло произойти смѣшенія этихъ знаковъ со знаками сложенія и вычитанія, относительное число вмѣстѣ съ его знакомъ заключаютъ въ скобки, напр., пишутъ такъ: (+7)+(—3); въ такомъ изображеніи знаки, стоящіе внутри скобокъ, суть знаки относительныхъ чиселъ, а знакъ +, стоящій между скобками, есть знакъ сложенія.

Положительныя числа можно писать и безъ знака +; въ такомъ случаѣ они не будутъ отличаться отъ чиселъ ариѳметическихъ.

14. Изображеніе чиселъ помощью отрѣзковъ прямой. Для яснаго пониманія относительныхъ чиселъ полезно, говоря о такихъ числахъ, всегда представлять себѣ въ умѣ какія-нибудь изъ тѣхъ величинъ, для измѣренія которыхъ служатъ эти числа. Всего проще для этой цѣли брать отрѣзки прямой линіи, если условимся, помимо длины этихъ отрѣзковъ, принимать во вниманіе еще и ихъ направленіе.

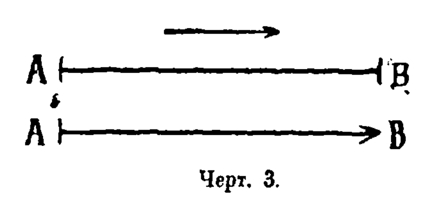
Отрѣзкомъ прямой (черт. 2) наз. часть какой-нибудь прямой линіи, ограниченная съ обѣихъ сторонъ, напр., съ одной стороны точкою *A*, съ другой точкою *B*. Въ каждомъ отрѣзкѣ мы условимся различать: во-1-хъ, длину



Черт. 2.

его (которая, конечно, можетъ быть больше и меньше), во-2-хъ, направленіе, которое для даннаго отрѣзка можетъ быть двоякое. Напр., во взятомъ нами отрѣзкѣ можно различать направленіе или отъ точки *A* къ точкѣ *B* (слѣва направо), или, наоборотъ, отъ *B* къ *A* (справа налѣво). Если мы разсматриваемъ взятый отрѣзокъ въ направленіи отъ *A* къ *B*, то точку *A* мы будемъ называть началомъ отрѣзка, а точку *B* его концомъ.

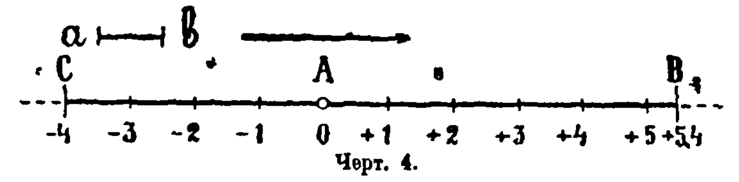
На чертежѣ направленіе, на которое хотятъ обратить вниманіе, иногда изображается стрѣлкой (чер. 3), поставленной вблизи отрѣзка, или на немъ самомъ, на концѣ его.



Черт. 3.

Отрѣзки прямой, въ которыхъ, помимо ихъ длины, мы обращаемъ вниманіе на направленіе, мы будемъ называть **направленными отрѣзками**.

Такими отрѣзками мы наглядно можемъ выражать отно-



Черт. 4.

сительныя числа слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ какуюнибудь прямую (черт. 4) и условимся, какое изъ двухъ

направленій этой прямой считать положительнымъ. Примемъ, напр., направленіе слѣва направо (указанное стрѣлкою) за положительное; тогда противоположное направленіе—справа налѣво—мы будемъ считать отрицательнымъ. Далѣе примемъ какую-нибудь длину *ab* (изображенную на чертежѣ) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, напр., +5,4. Возьмемъ на нашей прямой произвольную точку *A* и отложимъ вправо отъ нея 5,4 единицы длины, равныхъ *ab*. Тогда получимъ отрѣзокъ *AB*, длина котораго равна 5,4 единицамъ и направленіе положительное. Этотъ отрѣзокъ и выразитъ намъ наглядно число +5,4.

Возьмемъ теперь какое-нибудь отрицательное число, напр.,—4. Чтобы изобразить его наглядно, отложимъ отъ той же точки *A* влѣво 4 единицы длины. Тогда получимъ отрѣзокъ *AC*, котораго длина равна 4 единицамъ, а направленіе отрицательное; значитъ, этотъ отрѣзокъ выражаетъ число —4.

Очевидно, что такимъ путемъ всякое алгебраическое число мы можемъ выразить (на самомъ дѣлѣ или только мысленно) направленнымъ отрѣзкомъ.

Можно представить себѣ, что всѣ относительныя числа выражены направленными отрѣзками, отложенными на одной и той же прямой отъ одной и той же ея точки *A*, принятой за начало отрѣзковъ. Тогда на той части прямой, которая расположена направо отъ *A*, изобразится рядъ положительныхъ чиселъ: +1, +2, +3..., а на части прямой, расположенной влѣво отъ *A*, изобразятся отрицательныя части: —1, —2, —3... Прямую эту надо представлять себѣ безконечною въ обѣ стороны (хотя на чертежѣ по необходимости приходится ограничивать ее и справа, и слѣва). Число нуль выражается на этой прямой не отрѣзкомъ, а одною точкою *A*.

Такъ какъ направленіе отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ +, противоположно направленію отрѣзковъ, выражающихъ числа со знакомъ —, то и самые эти знаки принято называть **противоположными** знаками. Всякія два числа, какъ +3 и —3, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и т. п., у которыхъ знаки противоположны, а абсолютныя величины одинаковы, мы будемъ называть **противоположными числами.**

Если два направленныхъ отрѣзка *AB* и *CD* (черт. 5) имѣютъ одинаковую длину и одно и то же направленіе, то они считаются равными (подразумѣвается: по величинѣ

A ⟶ B C ⟶ D

Черт. 5.

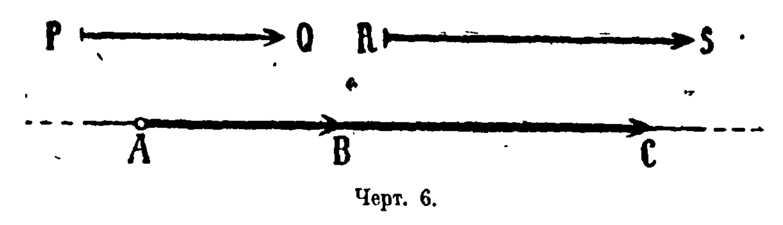
и по направленію). Если такіе отрѣзки измѣрены одной и тою же единицею длины, то, конечно, въ результатѣ получаются равныя алгебраическія числа.

15. Сложеніе направленныхъ отрѣзковъ. Чтобы сложить два направленные отрѣзка, поступимъ такъ: на какой-нибудь прямой отъ произвольной ея точки отложимъ сначала отрѣзокъ, равный первому слагаемому отрѣзку; затѣмъ отъ конца отложеннаго отрѣзка отложимъ на той же прямой другой отрѣзокъ, равный второму слагаемому отрѣзку; тогда отрѣзокъ, у котораго начало есть начало перваго отложеннаго отрѣзка, а конецъ— конецъ второго отложеннаго отрѣзка, принимается за **сумму** этихъ двухъ отрѣзковъ.

Приложимъ это опредѣленіе суммы къ слѣдующимъ 4-мъ частнымъ случаямъ.

1°. Пусть требуется найти сумму двухъ положительныхъ отрѣзковъ *PQ* и *RS* (черт. 6.). Для этого возьмемъ произвольную точку *A* на какой-нибудь прямой и на ней отложимъ отрѣзокъ *AB*, равный *PQ*; затѣмъ отъ конца *B* этого

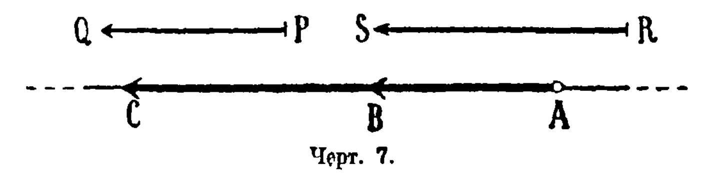
отрѣзка отложимъ на той же прямой отрѣзокъ BC, равный RS. Полученный послѣ этого отрѣзокъ AC есть сумма отрѣзковъ AB и BC и, слѣд., сумма равныхъ имъ отрѣзковъ PQ и RS.



Черт. 6.

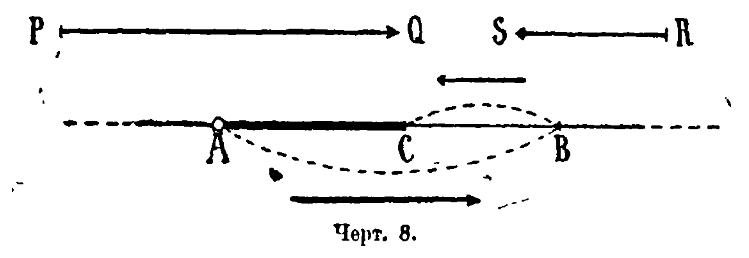
Очевидно, что сумма положительныхъ отрѣзковъ есть также положительный отрѣзокъ.

2°. Пусть требуется найти сумму $PQ+RS$ двухъ отрицательныхъ отрѣзковъ (черт. 7.) Построеніе будетъ такое же,



Черт. 7.

какъ и въ первомъ случаѣ, съ тою разницей, что отрѣзки теперь должны откладываться въ отрицательномъ направленіи. Очевидно, что сумма отрицательныхъ отрѣзковъ



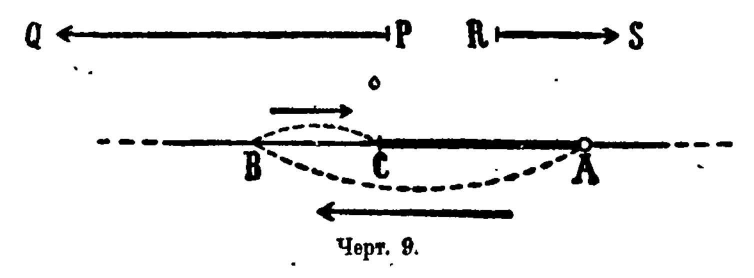
Черт. 8.

представляетъ собою также отрицательный отрѣзокъ.

3°. Найдемъ сумму отрѣзковъ PQ и RS (черт. 8), изъ которыхъ первый (PQ) положительный, а второй (RS)

отрицательный. Отложимъ отъ точки A вправо положительный отрѣзокъ $AB=PQ$ и затѣмъ отъ точки B отложимъ влѣво отрицательный отрѣзокъ $BC=RS$. Получившійся отрѣзокъ AC есть сумма $AB+BC$ и, слѣд., сумма $PQ+RS$. Эта сумма у насъ оказалась положительной благодаря тому, что длина положительнаго отрѣзка болѣе длины отрицательнаго; если бы первая длина была меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы отрицательной.

4°. Пусть, наконецъ, даны отрѣзки PQ и RS (черт. 9), изъ которыхъ первый отрицательный, а второй положительный.



Черт. 9.

Построивъ $AB=PQ$ и $BC=RS$, получимъ сумму AC. Эта сумма оказалась у насъ отрицательной, благодаря тому, что длина отрицательнаго отрѣзка больше длины положительнаго; если бы первая длина была меньше второй, то сумма, очевидно, оказалась бы положительной.

Замѣтимъ, что если бы въ случаѣ 3° или въ случаѣ 4° длина положительнаго отрѣзка была равна длинѣ отрицательнаго, то точка C совпала бы съ точкой A, и тогда сумма обратилась бы въ 0.

Умѣя находить сумму двухъ направленныхъ отрѣзковъ, мы легко можемъ получить сумму 3-хъ, 4-хъ и болѣе отрѣзковъ; для этого надо сначала найти сумму первыхъ двухъ слагаемыхъ, затѣмъ сумму этой суммы и третьяго слагаемаго отрѣзка, далѣе сумму послѣдней суммы и четвертаго отрѣзка и т. д.

Сумма отрѣзковъ обладаетъ **перемѣстительнымъ** свойствомъ, т.-е. она не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ. Предлагаемъ самимъ учащимся убѣдиться въ этомъ, перемѣстивъ слагаемые отрѣзки въ указанныхъ выше 4 случаяхъ нахожденія суммы двухъ отрѣзковъ.

Сумма направленныхъ отрѣзковъ обладаетъ также и **сочетательнымъ** свойствомъ, т.-е. она не измѣнится, если какіе-нибудь слагаемые отрѣзки мы замѣнимъ ихъ суммою

Замѣчаніе. Подобно указанному сложенію направленныхъ отрѣзковъ можно складывать также и другія направленныя величины, напр., прибыль и убытокъ, доходъ и расходъ, выигрышъ и проигрышъ и т. п. Существенная особенность такого сложенія состоитъ въ томъ, что **двѣ противоположно направленныя величины, имѣющія одинаковый абсолютный размѣръ, при сложеніи взаимно уничтожаются** (даютъ въ суммѣ нуль); напр., 5 рублей прибыли уничтожаются 5-ю рублями убытку, 10 рублей выигрыша уничтожаются 10-ю рублями проигрыша и т. п.

Сложеніе относительныхъ чиселъ.

16. Опредѣленіе. Суммою относительныхъ чиселъ называется такое число, которое выражаетъ сумму направленныхъ величинъ, выраженныхъ данными числами.

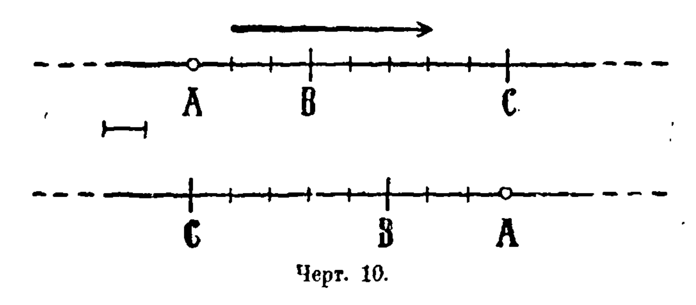
Напр., сумма: $(+8)+(-5)+(-2)$ есть число, выражающее сумму трехъ направленныхъ отрѣзковъ, изъ которыхъ одинъ измѣряется числомъ $+8$, другой числомъ -5 и третій числомъ -2 (предполагается, конечно, что всѣ измѣренія сдѣланы при помощи одной и той же единицы).

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма нѣсколькихъ чиселъ, наз. **сложеніемъ**.

17. Сложеніе двухъ чиселъ. Правило 1-е. Чтобы сложить два числа одинаковыхъ знаковъ, достаточно сложить ихъ абсолютныя величины и передъ суммою поставить тотъ знакъ, какой имѣютъ слагаемыя.

Такъ: $(+3)+(+5)=+8$; $(-3)+(-5)=-8$.

Дѣйствительно, сумма двухъ отрѣзковъ прямой: $AB=+3$ и $BC=+5$ (черт. 10, верхній) есть отрѣзокъ $AC=+8$, и сумма двухъ отрѣзковъ $AB=-3$ и $BC=-5$ (*нижній* чертежъ) составляетъ отрѣзокъ $AC=-8$.



Черт. 10.

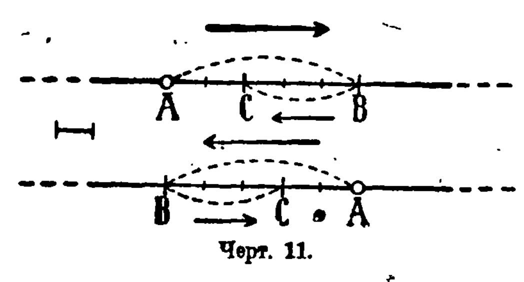
Подобно этому 3 рубля прибыли вмѣстѣ съ 5 рублями прибыли составляютъ 8 руб. прибыли; 3 руб. расхода вмѣстѣ съ 5 руб. расхода составляютъ 8 руб. расхода и т. п.

Такъ какъ положительныя числа пишутся и безъ знака, то вмѣсто равенства: $(+3)+(+5)=+8$ можно написать болѣе простое: $3+5=8$, что согласуется со сложеніемъ ариѳметическихъ чиселъ.

Правило 2-е. Чтобы сложить два числа противоположныхъ знаковъ, достаточно найти разность ихъ абсолютныхъ величинъ и передъ нею поставить знакъ того изъ слагаемыхъ чиселъ, у котораго абсолютная величина больше.

Такъ: $(+5)+(-3)=+2$; $(-5)+(+3)=-2$.

Дѣйствительно, сложивъ два отрѣзка (черт. 11, верхній), $AB=+5$ и $BC=-3$, мы получимъ сумму $AC=+2$, и, сложивъ (нижній чертежъ) два отрѣзка: $AB=-5$ и $BC=+3$, найдемъ сумму $AC=-2$.



Черт. 11.

Подобно этому 5 руб. дохода вмѣстѣ съ 3 руб. расхода равносильны 2 руб. дохода; 5 руб. долгу при 3 руб. имущества равносильны 2 руб. долгу и т. п.

Отбросивъ знакъ + передъ положительными числами, мы можемъ написанныя выше равенства переписать короче:

$$5+(-3)=2;\ (-5)+3=-2.$$

Слѣдствіе. Сумма двухъ противоположныхъ чиселъ равна нулю.

Такъ: $(+3)+(-3)=0;\ (-8)+(+8)=0.$

Напр., если я въ одной игрѣ выигралъ 3 руб., а въ другой проигралъ 3 руб., то въ результатѣ я ничего не выигралъ и ничего не проигралъ.

Къ указаннымъ правиламъ сложенія надо добавить еще слѣдующее соглашеніе:

прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить къ 0 какое-нибудь число значитъ оставить это число безъ измѣненія.

Такъ: $(+3)+0=+3;\ (-3)+0=-3;\ 0+(+5)=+5;$
$0+(-2)=-2;\ 0+0=0.$

18. Сложеніе трехъ и болѣе чиселъ. Сначала находятъ сумму двухъ первыхъ слагаемыхъ, къ ней прибавляютъ третье слагаемое, затѣмъ четвертое и т. д.

Пусть, напр., требуется найти сумму:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

которую можно выразить короче такъ:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Сложимъ два первыя слагаемыя: $8+(-5)=3$; приложимъ третье слагаемое: $3+(-4)=-1$; добавимъ четвертое слагаемое: $(-1)+3=2$.

Впрочемъ, такого порядка сложенія нѣтъ надобности всегда придерживаться, какъ это будетъ видно изъ свойствъ суммы, которыя мы сейчасъ укажемъ.

19. Свойства суммы. 1°. Перемѣстительное свойство: **сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.**

Напр.:

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3;$$
$$(-4)+(-1)+(+5)+(+3)=+3;$$
$$(+5)+(-1)+(-4)+(+3)=+3 \text{ и т. д.}$$

Такъ, если торговецъ, продавъ 4 предмета, получилъ прибыли на одномъ изъ нихъ 3 руб., на другомъ 5 руб., на третьемъ же предметѣ имѣлъ убытокъ 4 руб. и на четвертомъ также убытокъ 1 руб., то для него безразлично, въ какомъ порядкѣ слѣдовали эти продажи; проданы ли были сначала тѣ предметы, на которыхъ получена прибыль, или сначала тѣ, которые дали убытокъ, или какъ-нибудь иначе; при всякомъ порядкѣ окажется одно и то же, именно: послѣ 4-хъ продажъ торговецъ получилъ прибыли 3 рубля.

2°. Сочетательное свойство: **сумма не измѣнится, если какія-нибудь слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммой.**

Возьмемъ, напр., такую задачу: торговецъ получилъ прибыли: въ первый день +10 руб., во второй день —3 руб., въ третій день +12 руб.; сколько прибыли получилъ торговецъ за всѣ эти 3 дня? Мы можемъ узнать это различными способами; напр., узнаемъ сначала, сколько прибыли получилъ торговецъ за первые два дня и затѣмъ добавимъ къ этой прибыли ту, которую онъ получилъ за третій день:

$$[(+10)+(-3)]+(+12)=(+7)+(+12)=+19.$$

Но тотъ же результатъ, очевидно, мы получимъ, если узнаемъ сначала, сколько прибыли имѣлъ торговецъ за два послѣднихъ дня, и потомъ эту прибыль приложимъ къ той, которую онъ имѣлъ за первый день:

$$(+10)+[(-3)+(+12)]=(+10)+(+9)=+19.$$

Наконецъ, мы можемъ сдѣлать и такъ: узнаемъ сначала, какъ велика прибыль за первый и третій день вмѣстѣ, а потомъ добавимъ ее къ прибыли второго дня:

$$(-3)+[(+10)+(+12)]=(-3)+(+22)=+19.$$

Во всѣхъ случаяхъ мы получаемъ одно и то же число +19.

Вообще, если a, b, c означаютъ какія-нибудь относительныя числа, то сочетательное свойство въ примѣненіи къ суммѣ трехъ слагаемыхъ можно выразить такою формулой:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ высказать сочетательное свойство такъ:

чтобы прибавить сумму къ какому-нибудь числу, достаточно къ этому числу прибавить каждое слагаемое одно за другимъ.

Слѣдствіе. Основываясь на сочетательномъ свойствѣ, мы можемъ вычислить сумму относительныхъ чиселъ такъ: сначала найдемъ сумму всѣхъ положительныхъ слагаемыхъ, затѣмъ сумму всѣхъ отрицательныхъ слагаемыхъ и эти двѣ суммы соединимъ въ одну.

Напр., чтобы найти сумму: $(-4)+(+3)+(-1)+(+5)$, мы можемъ сгруппировать слагаемыя такъ:

$$[(+3)+(+5)]+[(-4)+(-1)]=(+8)+(-5)=+3.$$

3°. Перемѣна знаковъ у слагаемыхъ: **если у каждаго слагаемаго перемѣнимъ знакъ на противоположный, то и у суммы перемѣнится знакъ на противоположный, а абсолютная величина ея останется безъ измѣненія.**

Такъ: $(+5)+(+3)=+8$; | $(+5)+(-3)=+2$;
$(-5)+(-3)=-8$; | $(-5)+(+3)=-2$.

Вычитаніе относительныхъ чиселъ.

20. Опредѣленіе. Вычитаніе есть дѣйствіе (обратное сложенію), **посредствомъ котораго по данной суммѣ двухъ слагаемыхъ и одному изъ этихъ слагаемыхъ отыскивается другое.**

Такъ, вычесть изъ $+3$ число -2 значитъ найти такое алгебраическое число x, чтобы сумма $(-2)+x$ или, что все равно, сумма $x+(-2)$ равнялась $+3$; такое число есть и при томъ только одно, именно $+5$, такъ какъ $(+5)+(-2)=+3$ и никакое иное число, сложенное съ -2, не даетъ въ суммѣ $+3$.

21. Вычитаніе бо́льшаго числа изъ меньшаго. Въ ариѳметикѣ вычитаніе невозможно, если вычитаемое превосходитъ уменьшаемое. Въ области алгебраическихъ чиселъ это ограниченіе должно быть отброшено. Пусть, напр., требуется изъ 7 вычесть 10. Это значитъ: найти такое алгебраическое число x, которое, сложенное съ вычитаемымъ 10, даетъ въ суммѣ уменьшаемое 7. Такое число есть, и притомъ только одно, именно, отрицательное число -3, такъ какъ, согласно правилу сложенія алгебраи-

ческихъ чиселъ, $10+(-3)=+7=7$ и никакое иное число, сложенное съ 10, не-можетъ составить числа 7; значитъ: $7-10=-3$. Подобно этому: $20-30=-10$; $5-7\frac{1}{2}=-2\frac{1}{2}$; $0-8=-8$; $a-(a+m)=-m$; и т. п.

Такимъ образомъ, **разность отъ вычитанія бóльшаго ариѳметическаго числа изъ меньшаго равна избытку бóльшаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ —.**

Задача. Нѣкто, имѣя m руб., проигралъ изъ нихъ n руб. Сколько рублей у него осталось послѣ игры?

Осталось $m-n$ руб. Вычислимъ эту разность для слѣдующихъ 3 случаевъ: 1) $m=15$, $n=5$; тогда $m-n=15-5=10$. Въ этомъ случаѣ у игравшаго осталось 10 руб. 2) $m=15$; $n=15$; тогда $m-n=15-15=0$: въ этомъ случаѣ у игравшаго ничего не осталось; 3) $m=15$, $n=20$; тогда $m-n=15-20=-5$; въ этомъ случаѣ игравшій остался долженъ 5 рублей.

22. Правило вычитанія. Чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно къ уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Для вывода этого правила разсмотримъ особо 3 случая: 1) когда вычитаемое положительное число, 2) когда вычитаемое отрицательное число и 3) когда оно есть 0.

1) Пусть изъ какого-нибудь числа a требуется вычесть положительное число $+3$ (или просто 3); это значитъ: требуется найти число x, которое, сложенное съ $+3$, дастъ a. Такое число равно суммѣ $a+(-3)$, потому что, приложивъ къ этой суммѣ число $+3$, получимъ уменьшаемое a Дѣйствительно, согласно сочетательному свойству, мы можемъ написать:

$$a+(-3)+(+3)=a+[(-3)+(+3)].$$

Но сумма противоположныхъ чиселъ -3 и $+3$ равна 0; значитъ, мы получимъ въ суммѣ $a+0$, что составляетъ просто a.

Такимъ образомъ: $a-(+3)=a+(-3)$,
и вообще: $a-(+b)=a+(-b)$.

Значитъ, вмѣсто того, чтобы вычитать число $+b$, можно прибавить противоположное число $-b$.

2) Пусть изъ того же числа a требуется вычесть отрицательное число -5; это значитъ: найти число x, которое, сложенное съ -5, дастъ уменьшаемое a. Такое число равно суммѣ $a+(+5)$ потому что, приложивъ къ этой суммѣ вычитаемое -5, получимъ уменьшаемое a:

$$a+(+5)+(-5)=a+[(+5)+(-5)]=a+0=a.$$

Такимъ образомъ: $a-(-5)=a+(+5)$,
и вообще: $a-(-b)=a+(+b)$.

Значитъ, вмѣсто того, чтобы вычитать число $-b$, можно прибавить противоположное число $+b$.

3) Наконецъ, общее правило вычитанія примѣнимо и къ тому случаю, когда вычитаемое есть 0; надо только имѣть въ виду, что число, противоположное нулю, есть тоже число 0. Такимъ образомъ:

$$a-0=a+0=a.$$

Примѣры. 1) $(+10)-(-2)=(+10)+(+2)=+12$;
2) $(-10)-(+2)=(-10)+(-2)=-12$;
3) $(-10)-(-2)=(-10)+(+2)=-8$.

23. Другое выраженіе правилъ сложенія и вычитанія. Правила сложенія и вычитанія, данныя нами раньше (§§ 17, 22), можно замѣнить другими, болѣе удобными для практическаго примѣненія. Эти правила слѣдующія:

1) **Чтобы прибавить положительное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.**

Пусть, напр., требуется къ $+7$ прибавить $+3$; согласно 1-му правилу сложенія (§ 17) сумма будетъ $+10$. Но то же

самое число мы получимъ, если къ $+7$ приложимъ абсо лютную величину числа $+3$, такъ какъ $+7+3=7+3=10$.

Точно такъ же, согласно второму правилу сложенія, сумма $(-7)+(+3)$ равна -4; но то же число мы получимъ, прибавивъ къ -7 просто 3, такъ какъ $(-7)+3=-4$.

2) **Чтобы вычесть положительное число, достаточно вычесть его абсолютную величину.**

Такъ, разность $(+7)-(+10)$, согласно общему правилу вычитанія (§ 22), равна суммѣ $(+7)+(-10)$, т.-е. числу -3; но то же число мы получимъ, если изъ -7 вычтемъ абсолютную величину числа $+10$, такъ какъ $(+7)-10=7-10=$ $=-3$. Точно такъ же, согласно общему правилу вычитанія, разность $(-7)-(+3)$ равна суммѣ $(-7)+(-3)$, т.-е. числу -10; но то же число мы получимъ, если изъ -7 вычтемъ 3, такъ какъ $-7-3=-10$.

3) **Чтобы прибавить отрицательное число, достаточно отнять его абсолютную величину.**

Такъ: $(+7)+(-10)=-3$ и $+7-10=7-10=-3$
$(-7)+(-10)=-17$ и $-7-10=-17$.

4) **Чтобы отнять отрицательное число, достаточно прибавить его абсолютную величину.**

Такъ: $(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$ и $5+3=8$,
$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2$ и $-5+3=-2$.

24. Формулы двойныхъ знаковъ. Обозначимъ абсолютную величину какого-нибудь относительнаго числа буквою a; тогда 4 правила, изложенныя въ предыдущемъ параграфѣ, мы можемъ выразить такими формулами двойныхъ знаковъ;

1) $+(+a)=+a$, 3) $+(-a)=-a$,
2) $-(+a)=-a$, 4) $-(-a)=+a$.

Замѣтимъ, что формулы эти остаются вѣрными и тогда, когда буква a означаетъ относительное число, а не абсо-

лютную величину, какъ мы предполагали раньше. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою. Положимъ, напр., что $a=-2$. Возьмемъ, какую-нибудь одну изъ указанныхъ формулъ, напр., 4-ю: $-(-a)=+a$ и подставимъ въ нее на мѣсто a число -2. Тогда получимъ такое равенство:

$$-[-(-2)]=+(-2).$$

Такъ какъ выраженіе $-(-2)=+2$, то лѣвая часть написаннаго равенства есть то же самое, что $-(+2)$, а это выраженіе равно -2; но и правая часть равенства даетъ -2; значитъ, равенство это вѣрно. Подобнымъ образомъ можно провѣрить и всѣ другія формулы.

25. Алгебраическая сумма. Разность двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ суммы. Напримѣръ, разность $7-3$ можетъ быть написана такъ: $7+(-3)$, или такъ: $(+7)+(-3)$.

Подобно этому, **выраженіе, представляющее собою рядъ послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній, можетъ быть представлено въ видѣ суммы. Напримѣръ, выраженіе**

$$20-5+3-7$$

можетъ быть написано такъ:

$$20+(-5)+3+(-7), \quad \text{или} \quad (+20)+(-5)+(+3)+(-7).$$

Сумма, въ которой слагаемыя могутъ быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, называется **алгебраическою** въ отличіе отъ ариѳметической, въ которой слагаемыя всегда числа положительныя.

Такъ какъ алгебраическая сумма представляетъ собою сумму относительныхъ чиселъ, то она обладаетъ всѣми свойствами, указанными нами для суммы такихъ чиселъ (§ 19).

26. Сравненіе относительныхъ чиселъ по величинѣ. Условимся считать **число a большимъ числа b тогда, когда разность $a-b$ положительное число,**

и число a считать меньшимъ числа b тогда, когда разность $a—b$ отрицательное число.

Условіе это находится въ согласіи съ нашимъ понятіемъ о бо́льшемъ и меньшемъ въ примѣненіи къ ариѳметическимъ числамъ. Мы говоримъ, напр., что 10 больше 7 (или 7 меньше 10), разумѣя при этомъ, что число 10 включаетъ въ себѣ, какъ часть, число 7 и что, слѣд., отъ 10 можно отдѣлить 7, при чемъ останется еще нѣкоторое число, тогда какъ отъ 7 нельзя отдѣлить 10; но это, другими словами, означаетъ, что разность 10—7 есть положительное число, тогда какъ разность 7—10 есть отрицательное число.

Изъ нашего условія можно вывести слѣдующія **слѣдствія:**

1) **Всякое положительное число больше всякаго отрицательнаго,** потому что разность между первымъ и вторымъ всегда положительна; такъ, $+3>-2$, потому что разность $(+3)-(-2)$, равная суммѣ $3+2$, есть число положительное.

2) **Всякое положительное число больше нуля** по той же причинѣ; напр., $+2>0$, такъ какъ $(+2)-0=2$.

3) **Всякое отрицательное число меньше нуля,** потому что разность между первымъ и вторымъ всегда отрицательна; напр., $-3<0$, такъ какъ $(-3)-0=-3$.

4) **Изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ то больше, у котораго абсолютная величина меньше;** напр., -7 больше -9, такъ какъ разность $(-7)-(-9)$, равная $(-7)+9$ $=9-7$, есть число положительное.

Для яснаго представленія сравнительной величины относительныхъ чиселъ всего лучше обратиться къ наглядному изображенію ихъ помощью направленныхъ отрѣзковъ прямой, какъ это было нами указано раньше (§ 15). Выбравъ произвольную единицу длины ab (черт. 14), вообразимъ,

что на неограниченной прямой вправо отъ какой-нибудь ся точки A, принятой за начало, отложены отрѣзки, изображающіе различныя положительныя числа напр., $+1$, $+2$, $+3$, $+4$..., а влѣво отъ той же точки отложены от-

Черт. 14.

рѣзки, изображающіе различныя отрицательныя числа, напр., -1, -2, -3, -4... Тогда, двигаясь по этой прямой слѣва направо (какъ указываетъ стрѣлка на чертежѣ), мы будемъ постоянно переходить отъ чиселъ меньшихъ къ бóльшимъ, а двигаясь въ обратномъ направленіи—справа налѣво—будемъ постоянно переходить отъ чиселъ бóльшихъ къ меньшимъ.

Упражненія.

Къ § 17.

10. $(+7)+(+3)$; $(-7)+(-3)$; $(+\frac{1}{2})+(+2\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2})+(-2\frac{1}{2})$.

11. $(+10)+(-2)$; $(+10)+(-12)$; $(-5)+(+6)$; $(-5)+(+2)$.

12. $4+(-3)$; $(-4)+3$; $8+(-10)$; $(-8)+10$.

13. $(+5)+(-5)$; $5+(-5)$; $0{,}4+(-0{,}4)$; $(-\frac{1}{2})+0{,}5$.
$8+0$; $\frac{3}{4}+0$; $0+2$; $0+0{,}3$; $0+0$.

Къ § 18.

14. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$; $(-0{,}5)+2+(-\frac{3}{4})+(-7)$.

15. $10+(-20)+(-3{,}7)+8$; $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$.

Къ § 19.

16. Провѣрить перемѣстительное свойство суммы на слѣдующихъ примѣрахъ:

$(+3)+(-7)+(+5)=(+3)+(+5)+(-7)=(-7)+(+5)+(+3)$;

$(-1)+(+10)+(-2)+(-3)=(+10)+(-2)+(-1)+(-3)=$
$=(-3)+(-2)+(-1)+(+10)=(+10)+(-2)+(-1)+(-3)$.

17. Провѣрить сочетательное свойство суммы на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$(-10)+(-5)+2+3=(-10)+[(-5)+2+3]=(-10)+(-5)+$$
$$+(2+3)=(2+3)+[(-10)+(-5)]=2+[(-10)+(-5)+3].$$

18. Убѣдиться на слѣдующихъ 2-хъ примѣрахъ, что перемѣна знаковъ на противоположные передъ каждымъ слагаемымъ влечетъ за собою перемѣну знака на противоположный и передъ суммой:

1) $(+10)+(+8)+(-5)+(-3)$; 2) $(-4)+(+7)+(-1)+(+2)$.

Къ § 21.

Произвести вычитаніе:

19. $8-12$; $10-25$; $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}-\frac{8}{9}$.

20. $0{,}72-2{,}3$; $0{,}(37)-0{,}(46)$.

21. $a-(a+b)$; $x-(x+y)$.

22. Товаръ купленъ за a руб., а проданъ за b руб. Сколько получено прибыли? Вычислить эту прибыль при $a=40$ и $b=35$. Что означаетъ здѣсь отрицательный отвѣтъ?

23. Нѣкто получаетъ ежегодно доходу a руб., а тратитъ въ годъ b руб. Сколько ежегодно остается? Вычислить отвѣтъ при $a=1200$, $b=1300$. Что означаетъ отрицательный отвѣтъ?

24. Гребецъ въ стоячей водѣ подвигается впередъ на m футовъ въ минуту. Но онъ плыветъ противъ теченія, которымъ лодка относится назадъ въ минуту на n футовъ. На сколько футовъ лодка подвигается противъ теченія въ минуту? Если $m=200$, $n=250$, какой будетъ отвѣтъ? Что онъ означаетъ?

25. Если мнѣ сейчасъ 30 лѣтъ, то черезъ сколько лѣтъ мнѣ будетъ 50? Черезъ сколько лѣтъ мнѣ будетъ 25 лѣтъ? Что означаетъ отрицательный отвѣтъ?

Къ §§ 22 и 23.

26. $12-(-2)$; $5-(-5)$; $(+8)-(-10)$; $(+1)-(-1)$.

27. $a-(-b)$; $(+m)-(-n)$; $+2x-(-3x)$.

28. $9-0$; $x-0$; $2m-0$; $a-0$.

29. $10+(-2)-(-4)-(-2)+(+2)$.

30. $(+100)-(-15)-(-8)+(-10)-(+7)$.

Къ § 25.

31. Вычислить сумму $a+b+c+d$ при $a=2$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{4}$.

32. Вычислить разноасть $m-n$ при $m=-10$, $n=-15$.
33. Представить выржение $10-2-3+7$ въ ивидѣ суммы.
34. Представить сумму $10+8$ въ видѣ разности.
35. *Представить сумму $a+x$ въ видѣ разностс.*
36. *Представить выраженіе $a-b-c$ въ видѣ уммы.*

Умноженіе относительныхъ чиселъ.

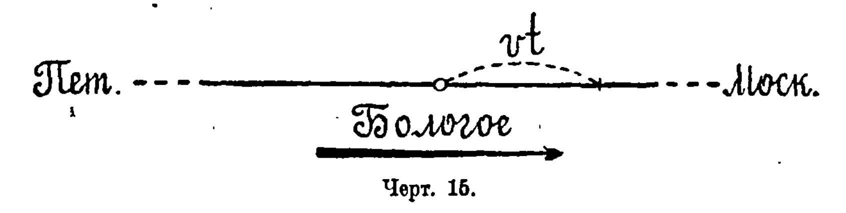
27. Чтобы лучше уяснить себѣ, въ чемъ состоитъ умноженіе относительныхъ чиселъ, предварительно разсмотримъ слѣдующую задачу.

Задача. Въ полдень поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Петроградъ съ Москвою) прослѣдовалъ черезъ станцію Бологое (расположенную приблизительно посрединѣ между Петроградомъ и Москвою). Опредѣлить мѣсто, въ которомъ находился этотъ поѣздъ въ моментъ времени, отстоящій отъ полудня (того же дня) на t часовъ, если извѣстно, что поѣздъ двигался со скоростью v верстъ въ каждый часъ (предполагается для простоты, что поѣздъ двигался безостановочно).

Положимъ, что въ этой задачѣ буквы v и t означаютъ какія-нибудь ариѳметическія числа (пусть, напримѣръ, скорость v поѣзда была 40 верстъ въ часъ, а моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, отстоялъ отъ полудня на 3 часа). Тогда въ отвѣтъ на вопросъ задачи мы только можемъ сказать, что въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на такомъ разстояніи отъ Бологова, какое онъ можетъ пройти въ t часовъ, т.-е. на разстояніи, равномъ vt верстъ. Но мы не можемъ сказать, нужно ли это разстояніе считать отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, или по направленію къ Петрограду, такъ какъ, во 1-хъ, въ задачѣ не указано, въ какомъ направленіи двигался поѣздъ: отъ Петрограда ли къ Москвѣ

или отъ Москвы къ Петрограду; и во-2-хъ, мы не знаемъ, идетъ ли рѣчь о моментѣ времени, который былъ позже полудня на t часовъ, или же о томъ моментѣ, который былъ раньше полудня на t часовъ. Такимъ, образомъ, задача наша, чтобы быть вполнѣ опредѣленной, должна распасться на слѣдующія 4 отдѣльныя задачи:

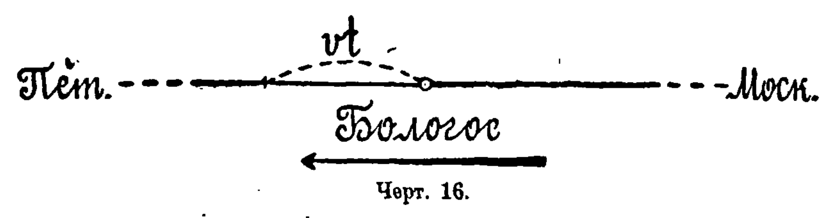
1) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ послѣ полудня.



Черт. 15.

Тогда отвѣтъ будетъ таковъ: въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 15).

2) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Москвы къ Петрограду со скоростью v верстъ въ часъ, прослѣдовалъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ послѣ полудня.

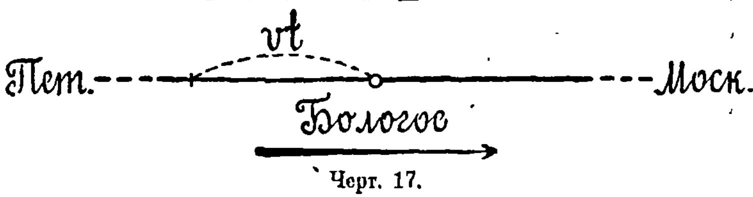


Черт. 16.

Отвѣтъ будетъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Петрограду (черт. 16).

3) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. *Опредѣлить* мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ до полудня.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Петрограду (черт. 17).



Черт. 17.

4) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Москвы къ Петрограду со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ до полудня.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 18).



Черт. 18.

Введеніе въ алгебру отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствій надъ ними позволяетъ эти 4 отдѣльныя задачи выразить одною общею задачею и дать для нея одно общее рѣшеніе. Для этого предварительно условимся, во-1-хъ, какое изъ двухъ возможныхъ направленій скорости поѣзда (отъ Петрограда къ Москвѣ, или наоборотъ) считать за положительное и какое за отрицательное; и, во-2-хъ, какой промежутокъ времени, слѣдующій за полуднемъ или предшествующій ему, считать положительнымъ и ка-

кой отрицательнымъ. Условимся, напр., скорость поѣзда при движеніи его отъ Петрограда къ Москвѣ считать положительной, а скорость при обратномъ движеніи— отъ Москвы къ Петрограду—считать отрицательной; такимъ образомъ мы будемъ, напр., говорить: поѣздъ двигался со скоростью +40 верстъ въ часъ, или поѣздъ двигался со скоростью —35 верстъ въ часъ, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ поѣздъ шелъ отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, а во второмъ случаѣ онъ шелъ отъ Москвы къ Петрограду со скоростью 35 верстъ въ часъ. Далѣе условимся считать положительными всѣ тѣ промежутки времени, которые слѣдуютъ за полуднемъ; напр., мы будемъ говорить, что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, отстоитъ отъ полудня на + 4 часа, или моментъ этотъ отстоитъ отъ полудня на —3 часа, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ моментъ времени надо считать позднѣе полудня на 4 часа, а во второмъ случаѣ его надо брать раньше полудня на 3 часа.

Допустимъ теперь, что въ задачѣ нашей буквы t и v будутъ означать не числа ариѳметическія, какъ мы прежде предполагали, а числа относительныя; напр., t можетъ означать въ задачѣ и +4, и —3; v можетъ означать и +40, и —35, и другія алгебраическія числа. Тогда мы можемъ сказать, что задача наша включаетъ въ себѣ всѣ 4 частные случая, указанные выше, и точнымъ отвѣтомъ на нее будетъ слѣдующій общій отвѣтъ:

въ указанный моментъ времени разстояніе поѣзда отъ Бологова ровно vt верстъ,

если подъ произведеніемъ vt относительныхъ чиселъ условимся разумѣть произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ плюсъ въ томъ случаѣ, когда оба

сомножителя числа положительныя или оба числа отрицательныя, и со знакомъ минусъ въ томъ случаѣ, когда одинъ сомножитель число положительное, а другой—отрицательное. При этомъ условіи нашъ общій отвѣтъ (указанный выше) будетъ годенъ для всѣхъ частныхъ случаевъ. Дѣйствительно:

1) Пусть буквы v и t означаютъ положительныя числа, напр., $v=+40$ и $t=+3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, и что требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда въ моментъ времени, бывшій 3 часа послѣ полудня. Въ этомъ случаѣ искомое мѣсто лежитъ, какъ мы видѣли, на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (см. черт. 15). Значитъ, искомое разстояніе равно +120 вер. Но, согласно нашему условію, и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(+3)=+120$. Слѣд., искомое разстояніе равно произведенію vt верстъ.

2) Пусть v отрицательное число, напр., —40, а t положительное число, напр. +3. Эти заданія надо понимать въ томъ смыслѣ, что поѣздъ шелъ отъ Москвы къ Петрограду, и надо опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа послѣ полудня. Мы видѣли, что тогда оно лежитъ на 120 верстъ отъ Бологова, по направленію къ Петрограду (см. черт. 16), т.-е. искомое разстояніе равно —120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(+3)=-120$; значитъ, искомое разстояніе равно vt вер.

3) Пусть v положительное число, напр., +40, а t отрицательное число, напр. —3. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ отъ Петрограда къ Москвѣ, и требуется опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа до полудня. Это мѣсто находится на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Петрограду (см. черт. 17); значитъ, искомое

разстояніе равно —120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(-3)=-120$; слѣдовательно, искомое разстояніе равно vt верстъ.

4) Пусть, наконецъ, и v, и t означаютъ отрицательныя числа, напр., $v=-40$, $t=-3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Москвы къ Петрограду, и что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, былъ за 3 часа до полудня. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, искомое мѣсто лежитъ на разстояніи 120 верстъ отъ Бологова, по направленію къ Москвѣ (см. черт. 18), т.-е. искомое разстояніе равно +120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(-40)(-3)=+120$; значитъ, и теперь можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстъ.

Теперь будетъ понятно слѣдующее опредѣленіе.

28. Опредѣленіе. Произведеніемъ двухъ относительныхъ чиселъ наз. произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ + въ томъ случаѣ, когда перемножаемыя числа имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда они противоположныхъ знаковъ. Нахожденіе такого произведенія наз. умноженіемъ относительныхъ чиселъ.

Часть этого опредѣленія, касающаяся знаковъ, носитъ названіе **правила знаковъ**; его обыкновенно выражаютъ такъ: **при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ +, разные знаки даютъ —.**

Примѣры. $(+10)(+2)=+20$; вообще: $(+a)(+b)=+ab$;
$(-10)(+2)=-20$; $(-a)(+b)=-ab$;
$(+10)(-2)=-20$; $(+a)(-b)=-ab$;
$(-10)(-2)=+20$; $(-a)(-b)=+ab$;

29. Замѣчаніе. Данное опредѣленіе умноженія можно примѣнять и въ томъ случаѣ, когда какой-нибудь сомно-

житель равенъ нулю; надо только помнить, что абсолютная величина числа 0 есть 0 и что выраженія $+0$, -0 и просто 0 равносильны. Такимъ образомъ, $(+2) \,.\, 0 = +(2 \,.\, 0) = 0$; $(-2) \,.\, 0 = -(2 \,.\, 0) = -0 = 0$; $0 \,.\, (+2) = +(0 \,.\, 2) = +0 = 0$ и пр.

30*. Обобщеніе формулъ умноженія. Формулы: $(+a)(+b) = +ab$, $(-a)(+b) = -ab$, $(+a)(-b) = -ab$, $(-a)(-b) = +ab$ остаются вѣрными и тогда, когда подъ буквами a и b будемъ подразумѣвать числа алгебраическія. Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою. Возьмемъ, напр., равенство: $(-a)(-b) = +ab$ и посмотримъ, во что оно обратится, если въ него на мѣсто a подставимъ число -5 и на мѣсто b число -2:

$$[-(-5)][-(-2)] = +(-5)(-2).$$

Такъ какъ выраженія: $-(-5)$ и $-(-2)$ равносильны соотвѣтственно такимъ: $+5$ и $+2$, то лѣвая часть равенства представляетъ собою произведеніе $(+5)(+2)$, что, согласно правилу умноженія, равно $+10$. Въ правой части равенства произведеніе $(-5)\,(-2)$ равно $+10$, а выраженіе $+(+10)$ равносильно $+10$. Такимъ образомъ, обѣ части равенства даютъ одно и то же число $+10$, и, значитъ, оно вѣрно. Подобнымъ образомъ можемъ провѣрить и всѣ другія равенства.

31. Произведеніе 3-хъ и болѣе сомножителей. Произведеніемъ 3-хъ и болѣе данныхъ относительныхъ чиселъ, взятыхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, называется (какъ и въ ариѳметикѣ) число, которое получится, если сначала умножимъ первое данное число на второе, потомъ полученное произведеніе умножимъ на третье данное число и т. д. Напр., произведеніе 6 чиселъ:

$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1)$$

получится, если мы произведемъ умноженія въ такомъ порядкѣ:

$$(+2)(-1) = -2;\quad (-2)(+3) = -6;\quad (-6)(-10) = +60;$$
$$(+60)(-4) = -240;\quad (-240)(-1) = +240.$$

32. Знакъ произведенія. Если перемножаются только одни положительныя числа, то знакъ окончательнаго произведенія долженъ быть +. Но когда всѣ или нѣкоторые сомножители числа отрицательныя (при чемъ ни одинъ изъ остальныхъ сомножителей не есть 0), то **произведеніе окажется со знакомъ + въ томъ, случаѣ когда число отрицательныхъ сомножителей четное, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда это число нечетное.** Такъ, произведенія:

$$(+2)(-1)(+3)(-10)=+60$$

и $$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)(-1)=+240$$

оказались со знакомъ + вслѣдствіе того, что въ нихъ число отрицательныхъ сомножителей четное (въ первомъ 2, во второмъ 4); тогда какъ произведенія:

$$(+2)(-1)=-2, \quad (+2)(-1)(+3)=-6,$$
$$(+2)(-1)(+3)(-10)(-4)=-240$$

оказались со знакомъ — вслѣдствіе того, что въ каждомъ изъ нихъ отрицательные сомножители входятъ въ нечетномъ числѣ.

33. Свойства умноженія. Эти свойства тѣ же, какія принадлежатъ и умноженію ариѳметическихъ чиселъ (§ 9), а именно:

1) Перемѣстительное свойство. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Такъ, принявъ во вниманіе, что если a и b означаютъ какія-нибудь ариѳметическія числа, то $ab=ba$, мы будемъ имѣть согласно правилу умноженія алгебраическихъ чиселъ:

$$(+a)(+b)=+ab \quad \text{и} \quad (+b)(+a)=+ba=+ab$$
$$(-a)(+b)=-ab \quad \text{и} \quad (+b)(-a)=-ba=-ab$$
$$(+a)(-b)=-ab \quad \text{и} \quad (-b)(+a)=-ba=-ab$$
$$(-a)(-b)=+ab \quad \text{и} \quad (-b)(-a)=+ba=+ab.$$

Точно такъ же: $(+a) \,.\, 0=0$ и $0 \,.\, (+a)=0$.

Возьмемъ теперь произведеніе, состоящее болѣе, чѣмъ изъ 2-хъ сомножителей, напр., такое:

$$(+a)(-b)(-c)(+d).$$

Абсолютная величина этого произведенія равна $abcd$; знакъ же окажется + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ произведеніе отрицательные сомножители: Если мы переставимъ сомножителей какъ-нибудь, напр. такъ:

$$(-c)(+d)(-b)(+a),$$

то получимъ новое произведеніе, у котораго абсолютная величина равна $cdba$ и знакъ будетъ + или —, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ, входятъ въ это новое произведеніе отрицательные сомножители. Такъ какъ $cdba=abcd$ (по перемѣстительному свойству умноженія ариѳметическихъ чиселъ), и число отрицательныхъ сомножителей отъ перемѣщенія ихъ, очевидно, не могло измѣниться, то у обоихъ произведеній абсолютная величина будетъ одна и та же и знаки одинаковы; слѣдовательно:

$$(+a)(-b)(-c)(+d)=(-c)(+d)(-b)(+a).$$

Равенство это остается въ силѣ и тогда, когда въ числѣ сомножителей есть равные нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ произведенія окажутся нулями.

2) Сочетательное свойство. Произведеніе не измѣнится, если какихъ-нибудь сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напр., вычисляя произведеніе (—5)(+3)(—2), мы можемъ сомножителей (+3) и (—2) замѣнить ихъ произведеніемъ —6. Дѣйствительно, сомножителей этихъ мы можемъ, согласно перемѣстительному свойству, переставить, не измѣняя произведенія, къ началу ряда: (+3)(—2)(—5); тогда, вычисляя произведеніе, придется умножить (+3) на (—2) и потомъ полученное число (—6) умножить на (—5). Но

вмѣсто того, чтобы умножить (—6) на (—5), мы можемъ умножить (—5) на (—6); значитъ, произведеніе (—5)(+3)(—2) должно быть такое же, какъ и произведеніе (—5)[(+3)(—2)].

И дѣйствительно: (—5)(+3)(—2)=(—15)(—2)=+30 и (—5)[(+3)(—2)]=(—5)(—6)=+30.

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ чиселъ abc сочетательное свойство можно выразить такою формулой:

$$abc=a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же свойство высказать другими словами такъ: **чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное произведеніе умножить на второго сомножителя и т. д.**

Основываясь на сочетательномъ свойствѣ, мы можемъ, вычисляя произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, разбить ихъ на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя числа перемножить. Напр.:

$$(-2)(+8)(-5)(-9)=[(+8)(-9)]\ [(-2)(-5)]=(-72)(+10)=$$
$$=-720.$$

3) Распредѣлительное свойство. Чтобы умножить алгебраическую сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Ограничимся повѣркою этого свойства на примѣрахъ.

Примѣръ 1. [(—2)+9+(—3)] . (+7).

Если вычислимъ сначала сумму, а потомъ сдѣлаемъ умноженіе, то найдемъ:

$$(+4)(+7)=+28.$$

Умножимъ теперь каждое слагаемое отдѣльно на +7 и сложимъ результаты:

$(-2)(+7)=-14$; $(+9)(+7)=+63$; $(-3)(+7)=-21$;

$$-14+63-21=+63-25=+28.$$

Мы получили то же самое число $+28$.

Примѣръ 2. $[8+(-2)+(-3)](-10)$.

Вычисливъ сумму и умноживъ ее на -10, находимъ: $(+3)(-10)=-30$. Произведя умноженіе каждаго слагаемаго отдѣльно, получимъ то же самое число -30:

$8(-10)=-80$; $(-2)(-10)=+20$; $(-3)(-10)=+30$;

$$-80+20+30=-30.$$

Упражненія.

Къ § 29.

37. $(-2)(+3)$; $(+7)(-2)$; $(-8)(-10)$.
38. $(-8\frac{1}{2})(+2\frac{3}{4})$; $(+0,36)(-\frac{2}{9})$; $(-\frac{3}{5})(-0,7)$.
39. $(-1)^2$; $(-1)^3$; $(-1)^4$ $(-1)^5$.
40. $(-2)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-2)^5$.
41. Вычислить ax^2+bx+c при $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ и $x=4$.
42. Вычислить то же выраженіе при $a=-4$, $b=3$, $c=-5$, $x=-2$.
43. $4 . 0$; $5\frac{1}{2} . 0$; $0 . 3$; $0 . 0$.

Къ § 31.

44. $(-3)(+2)(-4)(-7)$. **45.** $(+0,2)(-1)(-1)(-7)$.
46. $(-\frac{1}{2})(+3,5)(+2)(-\frac{7}{8})$.

Къ § 33.

Убѣдиться повѣркою, что:

47. $(-5)(+2)(-1)=(+2)(-1)(-5)=(+2)(-5)(-1)$.
48. $10(-3)(-2)(+5)=10[(-3)(-2)(+5)]=10(-2)[(-3)(+5)]$.
49. $[10+(-3)+(-2)](-7)=10(-7)+(-3)(-7)+(-2)(-7)$.

Дѣленіе относительныхъ чиселъ.

34. Опредѣленіе. Дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), **посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ этихъ сомно-**

жителей отыскивается другой. Такъ, раздѣлить $+10$ на -2 значитъ найти такое число x, чтобы произведеніе $(-2)x$, или —что все равно—произведеніе $x(-2)$, равнялось $+10$; такое число есть, и притомъ только одно, именно -5, такъ какъ произведеніе $(-5)(-2)$ равно $+10$, а произведеніе какого-нибудь иного числа на -2 не можетъ составить $+10$.

35. Случаи, когда какое-нибудь данное число равно нулю. Такихъ случаевъ можетъ быть три, а именно:

1) **Если дѣлимое равно 0, а дѣлитель не равенъ 0, то частное должно быть 0.**

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на какое-нибудь число a значитъ найти такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведеніи 0. Такое число есть, и только одно (если a не равно 0), именно 0; значитъ, $0 : a=0$.

2) **Если дѣлимое равно 0 и дѣлитель равенъ 0, то частное можетъ равняться любому числу,**

потому что всякое число, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0.

3) **Если дѣлимое не равно 0, а дѣлитель равенъ 0, то для частнаго нельзя взять никакого числа,** потому что какое бы число мы ни предположили въ частномъ, оно, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0, а не какое-нибудь другое число.

36. Правило дѣленія. Чтобы раздѣлить одно относительное число на другое, достаточно раздѣлить ихъ абсолютныя величины и результаты взять со знакомъ $+$, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ $-$, когда у дѣлимаго и дѣлителя знаки разные.

Такъ: $(+10):(+2)=+5$, потому что $(+2)(+5)=+10$;
$(-10):(-2)=+5$, » » $(-2)(+5)=-10$;
$(-10):(+2)=-5$, » » $(+2)(-5)=-10$;
$(+10):(-2)=-5$, » » $(-2)(-5)=+10$.

Такимъ образомъ, правило знаковъ при дѣленіи остается то же самое, что и при умноженіи.

37. Нѣкоторыя свойства дѣленія. 1) **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на второго сомножителя, это частное на третьяго сомножителя и т. д.**

Напр., чтобы раздѣлить -40 на произведеніе $(+5)(-2)$, равное -10, мы можемъ вмѣсто того, чтобы дѣлить -40 на -10, раздѣлить -40 на $+5$ (получимъ -8) и найденное число раздѣлить затѣмъ на -2; въ результатѣ мы найдемъ то же самое число $+4$, которое получили бы, если бы прямо раздѣлили -40 на -10. Выразимъ это буквами такъ:

$$a:(bc)=(a:b):c.$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное, т.-е. число $(a:b):c$, на дѣлителя bc; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое a, то это будетъ значить, что предполагаемое частное вѣрно. Чтобы умножить какое-нибудь число на bc (или, что все равно, на cb), мы можемъ умножить это число на c и затѣмъ результатъ умножить на b. Умноживъ предполагаемое частное, т.-е. $(a:b):c$, на c, получимъ (по опредѣленію дѣленія) число $a:b$; умноживъ это число на b, получимъ дѣлимое a. Слѣд., предполагаемое частное вѣрно.

2) **Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ сомножителей, оставивъ другого безъ перемѣны.**

Напр., чтобы раздѣлить произведеніе $(-20)(+15)$, равное -300, на число -5, мы можемъ вмѣсто того, чтобы дѣлить -300 на -5, раздѣлить на -5 либо перваго сомножителя -20, оставивъ второго безъ перемѣны, либо второго сомножителя, оставивъ перваго безъ перемѣны; въ первомъ случаѣ получимъ: $(+4)(+15)=+60$; во второмъ случаѣ найдемъ: $(-20)(-3)=+60$; и въ томъ, и въ другомъ случаѣ мы получимъ то же самое число, какое получили бы, если бы прямо раздѣлили -300 на -5.

Это можно выразить буквенною формулой такъ:

$$(ab):c=(a:c)b \quad \text{или} \quad (ab):c=a(b:c).$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этихъ равенствъ, умножимъ каждое изъ этихъ предполагаемыхъ частныхъ на дѣлителя c; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое ab, то, значитъ, равенства вѣрны. Оба предполагаемыя частныя представляютъ собой произведенія. Чтобы умножить произведеніе достаточно умножить одного изъ сомножителей, оставивъ другого безъ измѣненія. Умноживъ на c въ первомъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(a:c)$, а во второмъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(b:c)$, мы въ обоихъ случаяхъ получимъ въ окончательномъ результатѣ дѣлимое ab; значитъ, оба равенства вѣрны.

Упражненія.

Къ § 35.

50. $0:8$; $0:\frac{1}{2}$; $0:0{,}3$; $0:a$;
$1:0$; $5:0$; $a:0$; $0:0$.

Къ § 36.

51. $(+20):(+4)$; $(+20):(-4)$; $(-20):(+4)$; $(-20):(-4)$.
52. $(+2a):(-2)$; $(-5x):x$; $(-7x^2):(-7)$.

Къ § 37.

Убѣдиться повѣркою, что:

53. $(-100):[(+5)(-4)(-5)]=\{[(-100):(+5)]:(-4)\}:(-5)$

54. $[(-100)\ (+20)]\ :\ (-5)=[(-100)\ :\ (-5)]\ (+20)=$ $=(-100)[(+20):(-5)]$.

Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

38. Предварительныя замѣчанія. 1) Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать (если не сдѣлано особыхъ оговорокъ), что буквы, входящія въ алгебраическія выраженія, означаютъ числа относительныя, какъ положительныя, такъ и отрицательныя; буквы могутъ также означать и число 0, *кромѣ случая, когда онѣ входятъ въ выраженіе въ качествѣ дѣлителя*: дѣленіе на 0 мы исключаемъ (§ 35).

2) *Если случится*, что въ *какомъ-либо* произведеніи есть нѣсколько сомножителей, выраженныхъ цыфрами, или нѣкоторые буквенные сомножители повторяются, то такія произведенія можно упростить, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ умноженія (§ 33, 2°). Возьмемъ, напр., произведеніе: $a3axa(-2)xy$. Сгруппируемъ его сомножителей такъ: къ первой группѣ отнесемъ всѣхъ сомножителей, выраженныхъ цыфрами, ко второй группѣ—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою a, къ третьей—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою x, и т. д. Тогда мы получимъ выраженіе: $[3\ .\ (-2)]\ (aaa)(xx)y$, которое можно написать проще такъ: $-6a^3x^2y$.

Въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ предполагать, что произведенія приведены къ такому упрощенному виду.

39. Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій. Алгебраическое выраженіе наз. **раціональнымъ** относительно какой-нибудь буквы, входящей въ это

выраженіе, если буква эта не стоитъ подъ знакомъ извлеченія корня; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. **ирраціональнымъ.**

Напр., выраженіе $3xy+2\sqrt{z}$ есть раціональное относительно x и y и ирраціональное относительно z.

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя раціональны относительно всѣхъ входящихъ въ нихъ буквъ (такія выраженія наз. просто раціональными, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе наз. **цѣлымъ** относительно какой-нибудь буквы, если эта буква не входитъ въ него дѣлителемъ или частью дѣлителя; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. **дробнымъ.**

Напр., выраженіе $x^2+\frac{2x}{y-1}$ есть цѣлое относительно x, но дробное относительно y.

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить *бóльшею* частью только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя можно назвать цѣлыми относительно всѣхъ буквъ, входящихъ въ нихъ (ихъ просто называютъ цѣлыми, безъ добавленія: «относительно всѣхъ буквъ»).

Алгебраическое выраженіе, представляющее собою произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, наз. **одночленомъ.**

Напр., выраженія: $-6a^3b^2c$, $+0{,}5xy^3$, $2m^3$ и т. п. суть одночлены, такъ какъ они представляютъ собою произведенія.

Одночленомъ принято называть также и всякое отдѣльно взятое число, выраженное буквою или цыфрами, напр.: a, x, -3.

Число всѣхъ буквенныхъ сомножителей, составляющихъ одночленъ, наз. его **измѣреніемъ;** такъ, одночленъ $3a^2bc$,

представляющій собою произведеніе $3aabc$, есть одночленъ четвертаго измѣренія, одночленъ $10x^3$—третьяго измѣренія.

40. Коэффиціентъ. Выраженный цыфрами сомножитель, стоящій впереди одночлена, наз. коэффиціентомъ его. Такъ, въ одночленѣ $-6a^3b^2c$ число -6 есть коэффиціентъ этого одночлена.

Если коэффиціентъ есть цѣлое положительное число, то онъ означаетъ, сколько разъ повторяется слагаемымъ то буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ. Напр., $3ab=(ab) \cdot 3=ab+ab+ab$. Если коэффиціентъ есть дробное положительное число, то онъ означаетъ, какая дробь берется отъ буквеннаго выраженія, къ которому онъ относится. Такъ, въ выраженіи $^5/_4x^2$ коэффиціентъ означаетъ, что отъ x^2 берется $^5/_4$, потому что $^5/_4x^2=x^2 \cdot {}^5/_4$, а умножить на $^5/_4$ значитъ взять $^5/_4$ отъ множимаго.

Отрицательный коэффиціентъ означаетъ, что буквенное выраженіе, передъ которымъ онъ стоитъ, умножается на абсолютную величину этого коэффиціента и результатъ берется съ противоположнымъ знакомъ.

При одночленѣ, не имѣющемъ коэффиціента, можно подразумѣвать коэффиціентъ $+1$ или -1, смотря по знаку, который стоитъ (или подразумѣвается) передъ одночленомъ; такъ, $+ab$ (или ab) все равно, что $+1ab$, и $-ab$ все равно, что $(-1)\ ab$.

Замѣчаніе. Не должно думать, что одночленъ, передъ которымъ стоитъ знакъ—, представляетъ собою всегда отрицательное число, а одночленъ со знакомъ + есть всегда число положительное. Напр., при $a=-3$ и $b=+4$ одночленъ $+2ab$ даетъ отрицательное число: $(+2)\ (-3)\ (+4)=$ $=-24$, тогда какъ при тѣхъ же значеніяхъ буквъ одночленъ $-2ab$ даетъ число положительное: $(-2)(-3)\ (+4)=$ $=+24$.

41. Многочленъ. Алгебраическое выраженіе, составленное изъ нѣсколькихъ другихъ алгебраическихъ выраженій, соединенныхъ между собою знаками + или —, наз. **многочленомъ.** Таково, напр., выраженіе:

$$ab-a^2+3b^2-bc+\frac{a-b}{2}.$$

Отдѣльныя выраженія, отъ соединенія которыхъ знаками + или — составился многочленъ, наз. **членами** его. Обыкновенно члены многочлена разсматриваются вмѣстѣ съ тѣми знаками, которые стоятъ передъ ними; напр., говорятъ: членъ $-a^2$, членъ $+3b^2$, и т. п. Передъ первымъ членомъ, если передъ нимъ не поставлено никакого знака (какъ въ приведенномъ примѣрѣ), можно подразумѣвать знакъ +.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, наз. **двучленомъ** (или биномомъ), изъ трехъ членовъ—**трехчленомъ** (или триномомъ) и т. д.

Многочленъ наз. **раціональнымъ,** если всѣ его члены раціональные, и **цѣлымъ,** если всѣ его члены цѣлые.

Цѣлый многочленъ наз. **однороднымъ,** если всѣ его члены суть одночлены, имѣющіе одинаковое измѣреніе. Напр., выраженіе $2ab^2+a^3-5abc$ есть однородный многочленъ третьяго измѣренія.

42. Главнѣйшія свойства многочлена. Всякій многочленъ можно разсматривать, какъ сумму его членовъ. Напр., многочленъ:

$$2a^2-ab+b^2-\tfrac{1}{2}a+b$$

можно представить въ видѣ такой суммы:

$$(+2a^2)+(-ab)+(+b^2)+(-\tfrac{1}{2}a)+(+b),$$

такъ какъ выраженіе $(+2a^2)$ равносильно выраженію $2a^2$, выраженіе $+(-ab)$ равносильно выраженію $-ab$ и т. д.

(§ 24). Вслѣдствіе этого всѣ свойства суммы алгебраическихъ чиселъ (§ 19) принадлежатъ также и многочлену. Эти свойства слѣдующія:

1) **Перемѣстительное свойство: численная величина многочлена не зависитъ отъ порядка его членовъ.**

Положимъ, напр., мы находимъ численную величину многочлена: $2a^2—ab+b^2—{}^1/_2a+b$ при $a=4$ и $b=—3$. Для этого предварительно вычислимъ каждый членъ отдѣльно:

$$2a^2=2(4\ .\ 4)=32;\quad -ab=-4\ .\ (-3)=+12;$$

$$+b^2=+(-3)(-3)=+9;\quad -\tfrac{1}{2}a=-\tfrac{1}{2}\ .\ 4=-2.$$

Теперь сложимъ всѣ полученныя числа или въ томъ порядкѣ, въ какомъ написаны члены многочлена:

$$32+(+12)+(+9)+(-2)+(-3)=32+12+9-2-3=48,$$

или въ какомъ-нибудь иномъ порядкѣ; всегда получимъ одно и то же число 48.

2) **Сочетательное свойство: численная величина** ***многочлена не измѣнится,*** **если какіе-нибудь его члены мы замѣнимъ ихъ алгебраическою суммою.** Такъ, если въ данномъ выше многочленѣ мы замѣнимъ члены: $—ab$, $+b^2$ и $—{}^1/_2a$ ихъ алгебраическою суммою, т.-е. возьмемъ этотъ многочленъ въ такомъ видѣ:

$$2a^2+(-ab+b^2-{}^1/_2a)+b,$$

то при $a=4$ и $b=—3$ получимъ:

$$32+(12+9-2)-3=32+19-3=48,$$

т.-е. получимъ то же самое число 48, какое получили прежде.

3) **Перемѣна знаковъ у членовъ многочлена: если у каждаго члена многочлена перемѣнимъ знакъ на противоположный, то получимъ новый многочленъ, численная величина котораго противоположна численной величинѣ перваго многочлена.**

Напр., численная величина многочлена $2a^2—ab+b^2—\frac{1}{2}a+b$ при $a=4$ и $b=—3$ равна, какъ мы видѣли, 48; перемѣ-

нивъ у всѣхъ членовъ знаки на противоположные, мы получимъ новый многочленъ:

$$-2a^2+ab-b^2+\frac{1}{2}a-b,$$

численная величина котораго при тѣхъ же значеніяхъ буквъ составляетъ не 48, а —48:

$$-32+(-12)-9+2-(-3)=-32-12-9+2+3=-48.$$

Приведеніе подобныхъ членовъ.

43. Подобные члены. Члены многочлена, отличающіеся только коэффиціентами, или же не отличающіеся ничѣмъ, наз. подобными. Напр., въ такомъ многочленѣ:

$$\underline{4a^2b^3}-\underline{3ab}+\underline{0{,}5a^2b^3}+3a^2c+\underline{8ab}$$

первый членъ подобенъ третьему, потому что отличается отъ него только коэффиціентомъ (у перваго члена коэффиціентъ $+4$, а у третьяго $+0{,}5$); второй членъ подобенъ пятому по той же причинѣ (коэффиціентъ у второго члена -3, а у пятаго $+8$). Членъ $+3a^2c$ не имѣетъ себѣ подобныхъ, потому что онъ отличается отъ остальныхъ членовъ буквами и показателями при нихъ.

44. Приведеніе подобныхъ членовъ. Когда въ многочленѣ встрѣчаются подобные члены, то его можно упростить, соединяя всѣ подобные между собою члены въ одинъ. Такое соединеніе наз. **приведеніемъ подобныхъ членовъ.** Положимъ, напр., что въ какомъ-нибудь много членѣ имѣются такіе подобные члены: $+3a$, $-2a$, $-a$, $+5\frac{1}{2}a$. Будутъ ли эти члены слѣдовать одинъ за другимъ, или они будутъ раздѣляться какими-нибудь другими членами, мы всегда можемъ, основываясь на сочетательномъ свойствѣ многочлена, замѣнить всѣ эти члены ихъ алгебраическою суммою $+3a-2a-a+5\frac{1}{2}a$. Но

$$+3a-2a-a+5\tfrac{1}{2}a=(+3-2-1+5\tfrac{1}{2})a,$$

такъ какъ (согласно распредѣлительному свойству умноженія), чтобы умножить алгебраическую сумму $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ на число a, достаточно умножить на a каждое слагаемое этой суммы отдѣльно. Сумма $+3-2-1+5\frac{1}{2}$ равна $+5\frac{1}{2}$; поэтому:

$$+3a-2a-a+5\tfrac{1}{2}a=+5\tfrac{1}{2}a.$$

Такимъ образомъ: **нѣсколько подобныхъ членовъ многочлена можно замѣнить однимъ подобнымъ имъ членомъ, у котораго коэффиціентъ равенъ алгебраической суммѣ коэффиціентовъ всѣхъ этихъ членовъ.**

Примѣры.

1) $a+\overline{5mx}-\underline{2mx}+\overline{7mx}-\underline{8mx}=a+(5-2+7-8)mx=a+2mx,$

2) $\underline{4ax}+\overline{b^2}-\underline{7ax}-\underline{3ax}+\underline{2ax}=(4-7-3+2)\,ax+b^2=-4ax+$
$+b^2=b^2-4ax.$

3) $\underline{4a^2b^3}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{0{,}5a^2b^3}+3a^2c+\underline{\underline{8ab}}=(4+0{,}5)a^2b^3+(-3+8)ab$
$+3a^2c=4{,}5a^2b^3+5ab+3a^2c.$

Упражненія.

Къ § 40.

55. Написать сокращенно (при помощи коэффиціента) слѣдующія выраженія:

$x+x+x+x;$ $\qquad ab+ab+ab;$

$(a+b)+(a+b)+(a+b);$ $\qquad a^2x^3y+a^2x^3y;$

$\frac{m}{9}+\frac{m}{9}+\frac{m}{9}+\frac{m}{9};$ $\qquad ax+ax-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}.$

56. Написать безъ помощи коэффиціентовъ и показателей степеней слѣдующія выраженія:

$$3a^2b^3, \quad \frac{2}{3}a^2. \quad 3a^2-\frac{3}{4}b.$$

Вычислить слѣдующіе одночлены:

57. $7a^2bc$ при $a=3$, $b=2$, $c={}^5/_7$.

58. $0{,}8a(b+c)$ при $a=1$, $b={}^5/_6$, $c=0{,}25$.

59. $\frac{3(a+b)^2}{c}$ при $a=5$, $b={}^1/_2$; $c=3$.

Къ § 41.

Вычислить слѣдующіе многочлены:

60. $2x^4-x^3+5x^2-7x+1$ при $x=1$; $x=2$; $x=3$; $x=10$.
61. $x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x-120$ при $x=1$; $x=2$; $x=3$.
62. $x^4+ax^3-a^2x^2+a^3x-a^4$ при $x=5$, $a=3$.

Къ § 42.

63. Убѣдиться повѣркою, что при $x=2$ многочленъ:

$$x^3-2x^2+3x-5$$

обладаетъ свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ.

64. Убѣдиться повѣркою, что при $x=2$ два многочлена:

$$x^3-2x^2+3x-5 \text{ и } -x^3+2x^2-3x+5$$

даютъ числа, одинаковыя по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ знаковъ.

Къ § 44.

Сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ:

65. $5a^2b+7a^2b+a^2b$. **66.** $2\frac{1}{2}ax^3+\frac{3}{4}ax^3+0,3ax^3$.
67. $a^3x^2+3a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3+a^2x^3$. **68.** $2x-5xy-3xy-3,1xy-0,2xy$.
69. $a+8mxy^2-4\frac{1}{2}mxy^2$. **70.** $a-8mxy^2+4\frac{1}{2}mxy^2$.
71. $7b^2x+2ax-8b^2x$. **72.** $0,5ab^3-4a^3b-0,25ab^3$.
73. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b$.
74. $x^5-4ax-2ax^4+2a^2x^3+5ax^4-2a^2x^3+ax^4-7a^2x^3$.
75. $4x^7-2a^3x^4+2ax^6-3a^4x^3+3ax^6+5a^3x^4+a^4x^3-3a^3x^4-9ax^6$.

Первыя четыре алгебраическія дѣйствія.

Алгебраическое сложеніе и вычитаніе.

45. Сложеніе одночленовъ. Пусть требуется сложить одночлены: $3a$, $-5b$, $+0,2a$, $-7b$ и c. Ихъ сумма выразится многочленомъ:

$$3a+(-5b)+(+0,2a)+(-7b)+c,$$

который, согласно формуламъ двойныхъ знаковъ (**24**), можно переписать проще такъ:

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c.$$

Послѣ приведенія подобныхъ членовъ получимъ:

$$3{,}2a-12b+c.$$

Правило. Чтобы сложить нѣсколько одночленовъ, достаточно написать ихъ одинъ за другимъ съ ихъ знаками и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

46. Сложеніе многочленовъ. Пусть требуется къ какому-нибудь числу A приложить многочленъ $a-b+$ $+c-d$:

$$A+(a-b+c-d).$$

Многочленъ $a-b+c-d$ представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ: $a+(-b)+c+(-d)$; но чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ; слѣд.:

$$A+(a-b+c-d)=A+a+(-b)+c+(-d),$$

что, согласно формуламъ сложенія, можно переписать такъ:

$$A+(a-b+c-d)=A+a-b+c-d.$$

Правило. Чтобы прибавить многочленъ къ какому-нибудь числу, достаточно приписать къ этому числу всѣ члены многочлена одинъ за другимъ съ ихъ знаками (причемъ передъ тѣмъ членомъ, при которомъ не стоитъ никакого знака, должно подразумѣвать знакъ +) **и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.**

Примѣръ. $(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)$.

То, что мы обозначали сейчасъ буквой A, дано теперь въ видѣ многочлена $3a^2-5ab+b^2$. Примѣняя указанное правило сложенія, найдемъ:

$$(3a^2-5ab+b^2)+(4ab-b^2+7a^2)=(3a^2-5ab+b^2)+4ab-b^2+7a^2$$

Въ полученномъ результатѣ скобки могутъ быть отброшены, потому что отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится:

$$3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2.$$

Приведя въ этомъ многочленѣ подобные члены, получимъ окончательно: $10a^2-ab$.

Если данные многочлены содержатъ подобные члены, то полезно писать слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными; напр.:

$$+\left\{\begin{array}{r}3ax^2-\frac{1}{2}a^2x+2a^3\\-5ax^2+7a^2x-a^3\\\frac{3}{4}ax^2-2a^2x+0{,}3a^3\end{array}\right.$$
$$\overline{-1\tfrac{1}{4}ax^2+4\tfrac{1}{2}a^2x+1{,}3a^3}$$

47. Вычитаніе одночленовъ. Пусть требуется изъ одночлена $10a^2x$ вычесть одночленъ $-3a^2x$:

$$10a^2x-(-3a^2x).$$

Для этого, согласно общему правилу вычитанія (§ 22), достаточно къ уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Число, противоположное одночлену $-3a^2x$, есть $3a^2x$; значитъ:

$$10a^2x-(-3a^2x)=10a^2x+3a^2x,$$

что, послѣ приведенія подобныхъ членовъ, даетъ $13a^2x$.

Правило. Чтобы вычесть одночленъ, достаточно приписать его къ уменьшаемому съ противоположнымъ знакомъ и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

48. Вычитаніе многочленовъ. Пусть требуется изъ какого-нибудь числа A вычесть многочленъ $a-b+c$:

$$A-(a-b+c).$$

Для этого достаточно прибавить къ A число, противоположное числу $a-b+c$. Такое число получимъ § (42),

если передъ каждымъ членомъ многочлена $a-b+c$ перемѣнимъ знакъ на противоположный:

$$A-(a-b+c)=A+(-a+b-c).$$

Примѣняя теперь правило сложенія многочленовъ, получимъ:

$$A-(a-b+c)=A-a+b-c.$$

Правило. Чтобы вычесть многочленъ, достаточно приписать къ уменьшаемому всѣ члены вычитаемаго съ противоположными знаками и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ, если они окажутся.

Когда въ многочленахъ есть подобные члены, то вычитаемый многочленъ полезно писать подъ уменьшаемымъ, перемѣняя у вычитаемаго многочлена знаки на противоположные; *напр*., вычитаніе:

$$(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2-2b^2+4ab)$$

всего удобнѣе расположить такъ:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+\ b^2 \\ \underline{\pm 5a^2\pm 4ab\mp 2b^2} \\ 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

(въ вычитаемомъ многочленѣ верхніе знаки поставлены тѣ, какіе были даны, а внизу они перемѣнены на противоположные).

49. Раскрытіе скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ + или —. Пусть требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c).$$

Это надо понимать такъ, что требуется надъ многочленами, стоящими внутри скобокъ, произвести тѣ дѣйствія, которыя указываются знаками передъ скобками. Произведя эти дѣйствія по правиламъ сложенія и вычитанія, получимъ,

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c,$$

Такимъ образомъ, раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ +, мы не должны измѣнять знаковъ внутри скобокъ, а раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ знакъ —, мы должны передъ всѣми членами, стоящими внутри скобокъ, измѣнить знаки на противоположные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$10p-[3p+(5p-10)-4].$$

Для этого раскроемъ сначала внутреннія скобки, а затѣмъ внѣшнія:

$$10p-[3p+5p-10-4]=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

Можно поступить и въ обратномъ порядкѣ, т.-е. сначала раскрыть внѣшнія скобки, а потомъ внутреннія. Раскрывая внѣшнія скобки, мы должны принимать многочленъ, стоящій во внутреннихъ скобкахъ, за одинъ членъ и поэтому не должны измѣнять знаковъ внутри этихъ скобокъ:

$$10p-[3p+(5p-10)-4]=10p-3p-(5p-10)+4=$$
$$=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

50. Заключеніе въ скобки. Для преобразованія многочлена часто бываетъ полезно заключить въ скобки совокупность нѣкоторыхъ его членовъ, причемъ передъ скобками иногда желательно поставить +, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ суммы, а иногда —, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ разности. Пусть, напр., въ многочленѣ $a+b-c$ мы желаемъ заключить въ скобки два послѣднихъ члена, поставивъ передъ скобками знакъ +. Тогда пишемъ такъ:

$$a+b-c=a+(b-c),$$

т.-е. внутри скобокъ оставляемъ тѣ же знаки, какіе были въ данномъ многочленѣ. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу сложенія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Пусть въ томъ же многочленѣ $a+b-c$ требуется заклю-

чить въ скобки два послѣднихъ члена, поставивъ передъ скобками знакъ минусъ. Тогда пишемъ такъ:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b),$$

т.-е. внутри скобокъ передъ всѣми членами перемѣняемъ знаки на противоположные. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу вычитанія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Упражненія.

Къ § 46.

76. $A+(x-y-z)$. **77.** $(2m^2-n^3)+(3n^3-m^2)$.
78. $(5a+3b-2c)+(2b-7a+5c)$.
79. $(m^2+2mn+n^2)+(m^2-2mn+n^2)+(m^2-n^2)$.
80. $+\begin{cases} 4a^3-5a^2b+7ab^2-9b^3 \\ -2a^3+4a^2b-ab^2-4b^3 \\ 6a^3-10a^2b+8ab^2+10b^3. \end{cases}$
81. $(5a^3-4a^2+7a-5)+(2a^4-3a^3+5a-8)+(6a^3-3a+7)$.
82. $5ax^3-2ab^2x+c^3-abcx+(-2c^3+4ab^2x+2ax^3-3c^2d)$.

Къ § 48.

83. $A-(m-n-p)$. **84.** $18-(x-7)$. **85.** $40-(-5+2a)$.
86. $3a^2-(5b+2a^2-c)$. **87.** $(3a-3b+c)-(a+2b-c)$.
88. $(2a-3b)-(3a-4b)-(a+b)-(a-3b)$.
89. $5ax^3-2ab^2x+c^3-abcx-(-2c^3+4ab^2x+2ax^3-abcx)$.
90. $(5a^3-4a^2b-4ab^2+8c^3)-(2a^3-5a^2b-6ab^2+b^3)$.
91. Упростить выраженіе:
$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2+b^2-4c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2)$.

Къ § 49.

Раскрыть скобки въ слѣдующихъ выраженіяхъ и сдѣлать приведеніе:

92. $x+[x-(x-y)]$. **93.** $m-\{n-[m+(m-n)]+m\}$.
94. $2a-(2b-d)-[a-b-(2c-2d)]$.
95. $a-\{a-[a-(a-1)]\}$.
96. $a+b-c-[a-(b-c)]-[a+(b+c)-(a-c)]$.
97. $a-(b-c)-[b-(c-a)]+[c-(b-a)]-[c-(a+b)]$.
98. $[3a^3-(5a^2b+7ab^2-3b^3)]-[10b^3+12a^3-(14ab^2+5a^2b)]$.
99. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy+y^2)+[2x^2+2xy+(-4xy+3y^2)]$.

Къ § 50.

100. Въ многочленѣ $a-b-c+d$, не измѣняя его численной величины, 1) заключить въ скобки три послѣднихъ члена, поставивъ передъ скобками знакъ —; 2) заключить въ скобки два послѣднихъ члена, поставивъ передъ скобками знакъ +; 3) заключить въ скобки два среднихъ члена, поставивъ передъ скобками знакъ —.

101. Многочленъ $5x^3-3x^2+x-1$ представить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое было бы $5x^3-3x^2$.

102. Тотъ же многочленъ представить въ видѣ разности, въ которой уменьшаемое было бы $5x^3+x$.

Алгебраическое умноженіе.

51. Умноженіе степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^4 на a^3; другими словами, требуется умножить a^4 на произведеніе трехъ сомножителей: *aaa*. Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ умножить на второго сомножителя и т. д.; поэтому:

$$a^4a^3=a^4(aaa)=a^4aaa=aaaaaaa=a^{4+3}=a^7.$$

Вообще: $$a^ma^n=(\overbrace{aa\ldots a}^{m \text{ разъ}})(\overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ разъ}})=\overbrace{aa\ldots aaa\ldots a}^{m+n \text{ разъ}}=a^{m+n}.$$

Правило. При умноженіи степеней одного и того же числа показатели ихъ складываются.

Примѣры: 1) $aa^6=a^{1+6}=a^7$; 2) $m^{10}m^3=m^{10+3}=m^{13}$;
3) $x^{2n}x^{3n}=x^{2n+3n}=x^{5n}$;
4) $p^{r-2}p^{r+2}=p^{(r-2)+(r+2)}=p^{r-2+r+2}=p^{2r}$.

52. Умноженіе одночленовъ. Пусть дано умножить $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$. Такъ какъ одночленъ $-5a^3b^4d^2$ представляетъ собою произведеніе 4-хъ сомножителей $-5\,.\,a^3\,.\,b^4\,.\,d^2$, то для умноженія $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$ достаточно умножить множимое на перваго сомножителя

—5, результать умножить на второго сомножителя a^3 и т. д. Значить:

$$(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2)=(+3a^2b^3c)(-5)a^3b^4d^2=$$
$$=(+3)a^2b^3c(-5)a^3b^4d^2.$$

Въ послѣднемъ произведенiи, основываясь на сочетательномъ свойствѣ умноженiя (§ 35_2), соединимъ сомножителей въ такiя группы:

$$[(+3)(-5)](a^2a^3)(b^3b^4)cd^2=-15a^5b^7cd^2.$$

Слѣдовательно: $(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2)=-15a^5b^7cd^2$.

Правило. Чтобы перемножить одночлены, достаточно перемножить ихъ коэффицiенты и сложить показателей одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, перенести въ произведенiе съ ихъ показателями.

При умноженiи коэффицiентовъ надо, конечно, руководиться правиломъ знаковъ, т.-е. что при умноженiи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ +, а разные —.

Примѣры: 1) $(0{,}7a^3xy^2)(3a^4x^2)=2{,}1a^7x^3y^2$;
2) $(\frac{1}{2}mq^3)^2=({}^1/_2mq^3)({}^1/_2mq^3)={}^1/_4m^2q^6$;
3) $(1{,}2a^rm^{n-1})({}^3/_4am)=0{,}9a^{r+1}m^n$.
4) $(-3{,}5x^2y)({}^3/_4x^3)=-{}^{21}/_8x^5y$;
5) $(4a^nb^3)(-7ab^n)=-28a^{n+1}b^{n+3}$.

56. Умноженiе многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженiе.

Пусть дано умножить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ или вообще на какое-нибудь алгебраическое выраженiе, которое мы обозначимъ одною буквою m:

$$(a+b-c)m.$$

Всякiй многочленъ представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ. Но чтобы умножить сумму, доста-

точно умножить каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить; поэтому:

$$(a+b-c)m=[a+b+(-c)]m=am+bm+(-c)m.$$

Но $(-c)m=-cm$ и $+(-cm)=-cm$; значитъ:

$$(a+b-c)m=am+bm-cm.$$

Правило. Чтобы умножить многочленъ на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, достаточно умножить на это выраженіе каждый членъ многочлена и полученныя произведенія сложить.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, то это правило примѣнимо также и къ умноженію какого-нибудь алгебраическаго выраженія на многочленъ.

Примѣръ. Пусть требуется произвести умноженіе:

$$(3x^3-2ax^2+5a^2x-1)(-4a^2x^3).$$

Производимъ дѣйствія въ такомъ порядкѣ:

$(3x^3)(-4a^2x^3)=-12a^2x^6$; $(-2ax^2)(-4a^2x^3)=+8a^3x^5$;

$(+5a^2x)(-4a^2x^3)=-20a^4x^4$; $(-1)(-4a^2x^3)=+4a^2x^3$.

Искомое произведеніе будетъ:

$$-12a^2x^6+8a^3x^5-20a^4x^4+4a^2x^3.$$

Примѣры.

1) $(a^2-ab+b^2)3a=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=3a^3-3a^2b+3ab^2$;

2) $(7x^3+{}^3/_4ax-0,3)(2,1a^2x)=(7x^3)(2,1a^2x)+({}^3/_4ax)(2,1a^2x)-$
$-(0,3)(2,1a^2x)=14,7a^2x^4+1,575a^3x^2-0,63a^2x$.

3) $(5x^{n-1}-3x^{n-2}+1)(-2x)=-10^n+6x^{n-1}-2x$.

57. Умноженіе многочлена на многочленъ.

Пусть дано умножить:

$$(a+b-c)(d-e).$$

Примѣняя правило умноженія многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, мы можемъ написать:

$$(a+b-c)(d-e)=a(d-e)+b(d-e)-c(d-e),$$

Разсматривая теперь выраженіе $d-e$, какъ многочленъ, мы можемъ примѣнить правило умноженія какого-нибудь алгебраическаго выраженія на многочленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=ad-ae+(bd-be)-(cd-ce).$$

Наконецъ, раскрывъ скобки по правиламъ сложенія и вычитанія, получимъ:

$$\boldsymbol{(a+b-c)(d-e)=ad-ae+bd-be-cd+ce.}$$

Правило. Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, достаточно умножить каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя и полученныя произведенія сложить.

Примѣръ. $(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3)$.

Умножимъ сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Затѣмъ умножимъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Далѣе умножимъ всѣ члены множимаго на 3-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^5-3b^3.$$

Наконецъ, сложимъ полученныя произведенія и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ; окончательный результатъ будетъ:

$$a^5-5a^4b-2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3.$$

Примѣры.

1) $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+bn-ap+bp$;

2) $(x^2-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3$;

3) $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=$
$=3an^3+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+20a^3n=$
$=-7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n$;

4) $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-3(2a^2)-$
$-3(2a^2)+9=4a^4-6a^2-6a^2+9=4a^4-12a^2+9.$

Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

58. Опредѣленіе. Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь одной буквы значитъ написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему.

Такъ, многочленъ $1+2x+3x^2-x^3-{}^1/_2x^4$ расположенъ по **возрастающимъ степенямъ** буквы x. Тотъ же многочленъ будетъ расположенъ по **убывающимъ степенямъ** буквы x, если члены его напишемъ въ обратномъ порядкѣ.

$$-{}^1/_2-x^4\ x^3+3x^2+2x+1.$$

Буква, по которой расположенъ многочленъ, наз. **главной** его буквой. Когда члены многочлена содержатъ нѣсколько буквъ и ни одной изъ нихъ не приписывается какого-либо особаго значенія, то безразлично, какую изъ нихъ считать за главную.

Членъ, содержащій главную букву съ наибольшимъ показателемъ, наз. **высшимъ** членомъ многочлена; членъ, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ или не содержащій ея вовсе, наз. **низшимъ** членомъ многочлена.

59. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ всего удобнѣе производить такъ, какъ будетъ указано на двухъ слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. Умножить $3x-5+7x^2-x^3$ на $2-8x^2+x$.

$$\begin{array}{rl}
-x^3+7x^2+3x-5 & \\
-8x^2+x\ +2 & \\
\hline
8x^5-56x^4-24x^3+40x^2\ \ldots\ldots & \text{произведен. множимаго на } -8x^2 \\
-\ x^4+\ 7x^3+\ 3x^2-5x\ \ldots & \text{произведен. множимаго на } +x \\
-2x^3+14x^2+6x-10 & \text{произведен. множимаго на } +2 \\
\hline
8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10 & \text{полное произведеніе.}
\end{array}$$

Расположивъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ главной буквы, пишутъ множителя подъ множимымъ и подъ множителемъ проводятъ черту. Умножаютъ всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя (на $-8x^2$) и полученное частное произведеніе пишутъ подъ чертою. Умножаютъ затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя (на $+x$) и полученное второе частное произведеніе пишутъ подъ первымъ частнымъ произведеніемъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными. Такъ же поступаютъ при умноженіи всѣхъ членовъ множимаго на слѣдующіе члены множителя. Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводятъ черту; подъ этою чертою пишутъ полное произведеніе, складывая всѣ частныя произведенія.

Можно также оба многочлена расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы и затѣмъ производить умноженіе въ томъ порядкѣ, какъ было указано:

$$\begin{array}{rl}
-5+3x+7x^2-x^3 & \\
2+x-8x^2 & \\
\hline
-10+6x+14x^2-2x^3 \ldots\ldots\ldots & \text{произведеніе на } 2. \\
-5x+3x^2+7x^3-x^4 \ldots\ldots\ldots & \text{произведеніе на } +x. \\
+40x^2-24x^3-56x^4+8x^5 \ldots & \text{произведеніе на } -8x^2. \\
\hline
+10+x+57x^2-19x^3-57x^4+8x^5 \ldots & \text{полное произведеніе.}
\end{array}$$

Удобство этихъ пріемовъ, очевидно, состоитъ въ томъ, что при этомъ подобные члены располагаются другъ подъ другомъ и, слѣд., ихъ не нужно отыскивать.

Примѣръ 2. Умножить a^3+5a-3 на a^2+2a-1.

$$\begin{array}{r}
a^3 \quad +5a-3 \\
a^2+2a-1 \\
\hline
a^5 \quad +5a^3-3a^2 \quad\quad \\
+2a^4 \quad +10a^2-6a \quad \\
-a^3 \quad -5a+3 \\
\hline
a^5+2a^4+4a^3+7a^2-11a+3
\end{array}$$

Когда въ данныхъ многочленахъ недостаетъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ членовъ, то на мѣстѣ этихъ членовъ полезно оставлять пустыя пространства для болѣе удобнаго подписыванія подобныхъ членовъ, какъ мы это сдѣлали въ этомъ примѣрѣ.

60. Высшій и низшій члены произведенія.

Изъ разсмотрѣнія примѣровъ умноженія расположенныхъ многочленовъ слѣдуетъ:

высшій членъ произведенія равенъ произведенію высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя; низшій членъ произведенія равенъ произведенію низшаго члена множимаго на низшій членъ множителя.

Остальные члены произведенія могутъ получиться отъ соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Можетъ даже случиться, что въ произведеніи, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, всѣ члены уничтожатся, кромѣ высшаго и низшаго; напр.:

$$\begin{array}{l} x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4 \\ \quad x-a \\ \hline x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x \\ \quad -ax^4-a^2x^3-a^3x^2-a^4x-a^5 \\ \hline x^5 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad -a^5=x^5-a^5. \end{array}$$

61. Число членовъ произведенія.

Пусть во множимомъ 5, а во множителѣ 3 члена. Умноживъ каждый членъ множимаго на 1-й членъ множителя, мы получимъ 5 членовъ произведенія; умноживъ каждый членъ множимаго на 2-й членъ множителя, получимъ еще 5 членовъ произведенія; и т. д.; значитъ, всѣхъ членовъ произведенія будетъ 5 . 3, т.-е. 15. Вообще, **число членовъ произведенія, до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.**

Такъ какъ высшій и низшій члены произведенія не могутъ имѣть подобныхъ членовъ, а всѣ прочіе могутъ уничтожиться, то **наименьшее число членовъ произведенія, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно 2.**

Нѣкоторыя формулы умноженія двучленовъ.

62. I. Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ; т.-е.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)(a-b)=a^2+\underline{ab}-\underline{ab}-b^2=a^2-b^2$.

Напр., $25 \,.\, 15=(20+5)(20-5)=20^2-5^2=400-25=375$.

II. Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа; т.-е.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+\underline{ab}+\underline{ab}+b^2=$
$=a^2+2ab+b^2$.

Напр., $67^2=(60+7)^2=60^2+2 \,.\, 60 \,.\, 7+7^2=3600+840+$
$+49=4489$.

III. Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа, т.-е.

$$(a-b)^2+a^2-2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-\underline{ab}-\underline{ab}+b^2=$
$=a^2-2ab+b^2$.

Напр., $19^2=(20-1)^2=20^2-2 \,.\, 20 \,.\, 1+1^2=400-40+1=$
$=361$.

IV*. Кубъ суммы двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго числа; т.-е.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

V*. **Кубъ разности двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, минусъ устроенное произведенiе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведенiе перваго числа на квадратъ второго, минусъ кубъ второго числа; т.-е.**

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

63. Примѣненiе этихъ формулъ. При помощи этихъ формулъ можно иногда производить умноженiе многочленовъ проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

1) $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\,.\,1+1^2=16a^6-8a^3+1$;

2) $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$;

3) $\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)^2+2\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)+$
$+\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2$;

4) $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=$
$=(x+1)^2-y^2=x^2+2x+1-y^2$;

5) $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c^2)$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2$;

6) $(2a+1)^3=(2a)^3+3(2a)^2 1+3(2a)1^2+1^3=8a^3+12a^2+$
$+6a+1$;

7) $(1-3x^2)^3=1^3-3\,.\,1^2\,.\,3x^2+3\,.\,1\,.\,(3x^2)^2-(3x^2)^3=$
$=1-9x^2+27x^4-27x^6$.

Упражненiя.

Къ § 54.

103. $a^4\,.\,a$; $a^8\,.\,a^3$; $a^m\,.\,a^n$; $(2a)^3\,.\,(2a)^4$.
104. $x^{m-1}\,.\,x$; $x^{m-3}\,.\,x^{m+2}$; $y^{2m}\,.\,y^m\,.\,y$.

Къ § 55.

105. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$; **106.** $\left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right)$. **107.** $(0{,}3abx^m)(2{,}7a^2bx^2)$.

108. $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)(^1/_{21}a^3b)$. **109.** $(^3/_7mx^2y^3)^2$. **110.** $(0{,}1x^my^{n+1})^2$.
111. $(2a^3bx^2)^3$. **112.** $(^1/_2m^2ny^3)^3$. **113.** $(3a^3bc^2)(-^2/_3a^4b^2c)$.
114. $(-0{,}8x^3y)(-^3/_8xy^m)$. **115.** $(+5a^mb^2)(-7ab^m)$.
116. $(-^5/_6m^3n^4y)(-^3/_7mn^2y^3)$. **117.** $(-0{,}2a^3b^2)^2$.
118. $(-2x^3y^2)^3$.

Къ § 56.

119. $(a-b+c)8$; $(m+n-p)0{,}8$; $(2x-3y+z)5^3/_4$.
120. $(3a^2-2b^3+c)2ab$ **121.** $(5a-4a^2b+3a^3b^2-7a^4b^3)(5a^2b)$
122. $(3a^2b)(3a^3-4a^2b+6ab-b^3)$.
123. $(^2/_7a^3b)(^2/_7a^2b^3c)(^4/_5a^2b^2-5ab^3)$.
124. Упростить выраженіе: $(x^2-xy+y^2)z+(y^2-yz+z^2)x+(z^2-zx+x^2)y+3xyz$ и показать, что оно тождественно съ выраженіемъ: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$.

Къ § 57.

125. $(a+b-c)(m-n)$. **126.** $(2a-b)(3a+b^2)$.
127. $(a+^1/_2b)(2a-b)$. **128.** $(x^2+xy+y^2)(x-y)$.
129. $(x^2-xy+y^2)(x+y)$. **130.** $(7x-8y)^2$; $(0{,}3ax^2-^1/_2)^2$.
131. $(^1/_4a^3x-2a^2x^2)^2$.
132. $(15a^2-10b)(3a-2b)-(4a^2-5b)(5a-2b)$.
133. $(2x^3-x^2+3x-2)(3x^2+2x-1)-(5x^2-x-1)(x-1)$.

Къ §§ 59, 60, 61.

134. Расположить многочлены по убывающимъ степенямъ буквы x и сдѣлать ихъ умноженіе: $24x+6x^2+x^3+60$ и $12x-6x^2+12+x^3$.

135. Расположить многочлены по возрастающимъ степенямъ буквы x и сдѣлать умноженіе: $4x^2y^2+x^4+8xy^3-2x^3y+16y^4$ и $-2y+x$.

136. $(x^5-x^3+x-1)(x^4+x^2-1)$.
137. $(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)(a+x)$.
138. $(3x^3-5x^2y+4xy^2-y^3)(2x^2-4xy+3y^2)$.
139. $(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$.

140. Въ послѣднемъ примѣрѣ какой будетъ высшій и какой низшій членъ произведенія? Какъ ихъ получить?

141. Въ томъ же примѣрѣ какое число членовъ въ произведеніи до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ? Какое число членовъ остается послѣ приведенія подобныхъ членовъ? Почему въ произведеніи не можетъ быть меньше 2-хъ членовъ?

Къ §§ 62, 63.

142. $(m+n)(m-n)$; повѣрить при $m=10$, $n=2$.
143. $(a+1)(a-1)$. **144.** $(2a+5)(2a-5)$.
145. $(3ax^2-{}^1/_2)(3ax^2+{}^1/_2)$. **146.** $(a^2+1)(1-a^2)$.
147. $(2b+a)(a-2b)$. **148.** $\left(\frac{2}{3}a-\frac{2}{5}b\right)\left(\frac{2}{3}a+\frac{2}{5}b\right)$.
149. $\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)$. **150.** $(0{,}3x^2-10y^3)(0{,}3x^2+10y^3)$.
151. $(x+y)^2$; повѣрить при $x=3$, $y=2$; $x={}^1/_2$, $y={}^1/_2$.
152. $(a+1)^2$. **153.** $(1+2a)^2$. **154.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. **155.** $(2x+3)^2$.
156. $(3a^2+1)^2$. **157.** $(0{,}1xm+5x)^2$. **158.** $(4a^2b+{}^1/_2ab^2)^2$.
159. $(0{,}8a^3x+{}^3/_8ax^2)^2$. **160.** $(m-n)^2$; повѣрить при $m=5$, $n=3$; $m={}^1/_2$, $n={}^1/_3$. **161.** $(5a-2)^2$. **162.** $(3a^2b-{}^1/_2)^2$.
163. $(3a^2b-4ac)^2$. **164.** $(0{,}2x^3-{}^3/_8x)^2$. **165.** $(2m+3n)^2$.
166. $(x-1)^3$. **167.** $(3a^2+4b^2)^3$. **168.** $(4a^2b-2ab^2)^3$.
169. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$. **170.** $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.
171. $(m+n-p)(m+n+p)$. **172.** $(a+b+c)(a-b-c)$.
173. $[(a+b)+(c+d)][(a+b)-(c+d)]$.
Упростить выраженія:
174. $x=(a+b)^2+(a-b)^2$. **175.** $y=(a+b)^2-(a-b)^2$.

Алгебраическое дѣленіе.

64. Дѣленіе степеней одного и того же числа. Пусть дано раздѣлить $a^8 : a^5$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, а при умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то въ искомомъ частномъ показатель при буквѣ *a* долженъ быть такое число, которое, сложенное съ 5-ю, составляетъ 8; такое число равно разности 8—5. Значитъ, $a^8 : a^5=a^{8-5}=a^3$; дѣйствительно: $a^8=a^5 \cdot a^3$.

Правило. При дѣленіи степеней одного и того же числа показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго.

65. Нулевой показатель. Когда показатель дѣлителя равенъ показателю дѣлимаго, то частное равно 1; напр.: $a^5 : a^5 = 1$, потому что $a^5 = a^5 \cdot 1$. Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда получимъ въ частномъ букву съ нулевымъ показателемъ: $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$. Конечно, показатель 0 не имѣетъ того значенія, которое мы придавали показателямъ раньше, такъ какъ нельзя повторить число множителемъ 0 разъ. **Мы условимся подъ видомъ a^0 разумѣть частное отъ дѣленія одинаковыхъ степеней числа** a, и такъ какъ это частное равно 1, то мы должны принять, что $a^0 = 1$. Въ такомъ смыслѣ обыкновенно и разсматриваютъ это выраженіе.

66. Дѣленіе одночленовъ. Пусть дано раздѣлить $12a^7b^5c^2d^3$ на $-4a^4b^3d^3$. По опредѣленію дѣленія частное, умноженное на дѣлителя, должно составить дѣлимое. Но при умноженіи одночленовъ коэффиціенты ихъ перемножаются и показатели одинаковыхъ буквъ складываются, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятся въ произведеніе съ ихъ показателями (§ 55). Значитъ, у искомаго частнаго коэффиціентъ долженъ быть 12 : 4, т.-е. 3, показатели буквъ a и b получатся вычитаніемъ изъ показателей дѣлимаго показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя; буква c должна перейти въ частное съ своимъ показателемъ, а буква d совсѣмъ не должна войти въ частное, или войдетъ въ него съ показателемъ 0. Такимъ образомъ:

$$12a^7b^5c^2d^3 : 4a^4b^3d^3 = 3a^3b^2c^2d^0 = 3a^3b^2c^2.$$

Что найденное частное вѣрно, можно убѣдиться повѣркой: умноживъ $3a^3b^2c^2$ на $4a^4b^3d^3$, получимъ дѣлимое.

Правило. Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, достаточно коэффиціентъ дѣлимаго раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычесть показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и перенести въ частное, безъ измѣненія показателей, тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ.

Примѣры.

1) $3m^3n^4x : 4m^2nx = {}^3/_4 mn^3x^0 = {}^3/_4 mn^3$;

2) $-ax^ny^m : {}^3/_4 axy^2 = -{}^4/_3 a^0x^{n-1}y^{m-2} = -{}^4/_3 x^{n-1}y^{m-2}$;

3) $-0,6a^3(x+y)^4 : -2,5a(x+y)^2 = 0,24a^2(x+y)^2$.

67. Невозможное дѣленіе. Когда частное отъ дѣленія одночленовъ не можетъ быть выражено одночленомъ, то говорятъ, что дѣленіе **невозможно**. Это бываетъ въ двухъ случаяхъ:

1) когда въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ;

2) когда показатель какой-нибудь буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ.

Пусть, напр., дано раздѣлить $4a^2b$ на $2ac$. Всякій одночленъ, умноженный на $2ac$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву c; такъ какъ въ нашемъ дѣлимомъ нѣтъ этой буквы, то, значитъ, частное не можетъ быть выражено одночленомъ.

Также невозможно дѣленіе $10a^3b^2 : 5ab^3$, потому что всякій одночленъ, умноженный на $5ab^3$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву b съ показателемъ 3 или бо́льшимъ 3, тогда какъ въ нашемъ дѣлимомъ эта буква стоитъ съ показателемъ, меньшимъ 3-хъ.

68. Дѣленіе многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a+b-c$ на одночленъ или на какое-

нибудь алгебраическое выраженіе, которое мы обозначимъ одною буквою m. Искомое частное можно выразить такъ:

$$(a+b-c):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя m. Если въ произведеніи получимъ дѣлимое, то частное вѣрно. Примѣняя правило умноженія многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, получимъ:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}\cdot m+\frac{b}{m}\cdot m-\frac{c}{m}\cdot m=a+b-c.$$

(такъ какъ по опредѣленію дѣленія $\frac{a}{m}\cdot m=a$, $\frac{b}{m}\cdot m=b$,

$$\frac{c}{m}\cdot m=c).$$

Значитъ, предполагаемое частное вѣрно.

Правило. Чтобы раздѣлить многочленъ на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, достаточно раздѣлить на это выраженіе каждый членъ многочлена и полученныя частныя сложить.

Примѣры: 1) $(20a^3x^2-8a^2x^3-ax^4+3a^3x^3):4ax^2=$

$$=5a^2-2ax-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}a^2x;$$

2) $(14m^p-21m^{p-1}):-7m^3=-2m^{p-3}+3m^{p-4};$

3) $\left(\frac{1}{2}x^3y^3-0,3x^2y^4+1\right):2x^2y^2=$

$$=\frac{1}{4}xy-0,15y^2+\frac{1}{2x^2y^2}.$$

69. Дѣленіе одночлена на многочленъ.

Частное отъ дѣленія одночлена на многочленъ не можетъ быть выражено ни одночленомъ, ни многочленомъ. Дѣйствительно, если предположимъ, что частное $a:(b+c-d)$

равно какому-нибудь одночлену или многочлену, то произведеніе этого частнаго на многочленъ $b+c-d$ дало бы тоже многочленъ, а не одночленъ a, какъ требуется дѣленіемъ. Значитъ, частное отъ дѣленія одночлена a на многочленъ $b+c-d$ можно только обозначить знакомъ дѣленія, т.-е. такъ:

$$a:(b+c-d) \quad \text{или} \quad \frac{a}{b+c-d}.$$

Впослѣдствіи (напр., въ § 78) мы увидимъ, какъ подобныя *выраженія могутъ быть иногда упрощены.*

70. Дѣленіе многочлена на многочленъ.

Частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ можетъ быть выражено въ видѣ цѣлаго алгебраическаго выраженія лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ этомъ мы убѣдимся, когда разсмотримъ на примѣрѣ, какъ можно находить это частное.

Примѣръ. $(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)$.

Напишемъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ буквы x и расположимъ дѣйствіе такъ, какъ оно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ:

$$\begin{array}{lr|l}
 & 6x^4-19x^3+\;5x^2+17x-4 & \;3x^2-5x+1 \\
 & \underline{\pm 6x^4\mp 10x^3\pm\; 2x^2\qquad\qquad} & \;2x^2-3x-4 \\
\text{1-й остатокъ »} & \mathbf{-9x^3}+\;3x^2+17x-4 & \\
 & \underline{\mp\; 9x^3\pm 15x^2\mp 3x\quad} & \\
\text{2-й остатокъ »} & \mathbf{-12x^2}+20x-4 & \\
 & \underline{\mp 12x^2\pm 20x\mp 4} & \\
\text{3-й остатокъ...} & 0\qquad\qquad &
\end{array}$$

Предположимъ, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену, и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающимъ степенямъ буквы x.

Дѣлимое должно равняться произведенію дѣлителя на частное. Изъ умноженія расположенныхъ многочленовъ извѣстно (§ 60), что высшій членъ произведенія равенъ про-

изведенію высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя. Въ дѣлимомъ высшій членъ есть первый, въ дѣлителѣ и частномъ высшіе члены тоже первые. Значитъ, 1-й членъ дѣлимаго ($6x^4$) долженъ быть произведеніемъ 1-го члена дѣлителя ($3x^2$) на 1-й членъ частнаго. Отсюда слѣдуетъ: чтобы найти первый членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ первый членъ частнаго $2x^2$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ всѣ члены дѣлителя на первый членъ частнаго и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго. Для этого напишемъ его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и у всѣхъ членовъ вычитаемаго перемѣнимъ знаки на обратные. Получимъ послѣ вычитанія первый остатокъ. Если бы этотъ остатокъ оказался равнымъ нулю, то это значило бы, что въ частномъ никакихъ другихъ членовъ, кромѣ найденнаго перваго, нѣтъ, т.-е. что частное есть одночленъ. Если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, первый остатокъ не есть нуль, то будемъ разсуждать такъ:

Дѣлимое есть произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на каждый членъ частнаго. Мы вычли изъ дѣлимаго произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 1-й членъ частнаго; слѣд., въ 1-мъ остаткѣ заключается произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 2-й, на 3-й и слѣд. члены частнаго. Высшій членъ въ остаткѣ есть 1-й; высшій членъ дѣлителя тоже 1-й; высшій членъ въ частномъ (не считая 1-го) есть 2-й членъ. Значитъ, 1-й членъ остатка ($-9x^3$) долженъ равняться произведенію 1-го члена дѣлителя на 2-й членъ частнаго. Отсюда заключаемъ: чтобы найти 2-й членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ второй членъ частнаго $-3x$. Пишемъ его подъ чертою,

Умножимъ на 2-й членъ частнаго всѣ члены дѣлителя и полученное произведеніе вычтемъ изъ 1-го остатка. Получимъ 2-й *остатокъ*. *Если этотъ остатокъ равенъ нулю*, то дѣленіе окончено; если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, 2-й *остатокъ не равенъ нулю*, то будемъ разсуждать такъ:

Второй остатокъ есть произведеніе всѣхъ членовъ дѣлителя на 3-й, на 4-й и слѣд. члены частнаго. Такъ какъ изъ этихъ членовъ частнаго высшій есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й членъ частнаго найдемъ, если первый членъ 2-го остатка раздѣлимъ на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ —4. Умноживъ на —4 всѣ члены дѣлителя и вычтя произведеніе изъ остатка, получимъ 3-й остатокъ. Въ нашемъ примѣрѣ этотъ остатокъ оказался нулемъ; это показываетъ, что въ частномъ другихъ членовъ, кромѣ найденныхъ, не можетъ быть. Если бы 3-й остатокъ былъ не 0, то, подобно предыдущему, надо было бы дѣлить 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя; отъ этого получился бы 4-й членъ частнаго, и т. д.

Подобнымъ же образомъ можно выполнить дѣленіе, расположивъ оба многочлена по возрастающимъ степенямъ главной буквы:

$$\begin{array}{l|l}
-4+17x+5x^2-19x^3+6x^4 & 1-5x+3x^2 \\
\mp 4 \pm 20x \mp 12x^2 & \overline{-4-3x+2x^2} \\
\hline
\quad -3x+17x^2-19x^3 & \\
\quad \mp 3x \pm 15x^2 \mp 9x^3 & \\
\hline
\qquad 2x^2-10x^3+6x^4 & \\
\qquad \pm 2x^2 \mp 10x^3 \pm 6x^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

При такомъ расположеніи первые члены въ дѣлимомъ, дѣлителѣ, частномъ и остаткахъ будутъ н и з ш і е. Такъ какъ низшій членъ произведенія (дѣлимаго) долженъ равняться произведенію низшаго члена множимаго (дѣли-

теля) на низшій членъ множителя (частнаго), то ходъ разсужденій и порядокъ дѣйствія остаются тѣ же самые, какъ и въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

Вотъ еще нѣкоторые **примѣры** дѣленія многочленовъ:

1) $28x^4-13cx^3-26c^2x^2+15c^3x \mid 7x^2+2cx-5c^2$

$\quad$ » $-8cx^3+20c^2x^2 \qquad\qquad 4x^2-3cx$

$\quad -21cx^3-6c^2x^2+15c^3x$

$\qquad$ » $+6c^2x^2-15c^3x$

$\qquad\qquad 0$

Мы здѣсь не писали произведеній 1-го члена дѣлителя на 1-й, на 2-й и т. д. члены частнаго, потому что эти произведенія всегда равны тѣмъ членамъ, подъ которыми они подписываются, и при вычитаніи всегда сокращаются. Обыкновенно такъ и дѣлаютъ. Кромѣ того, подписывая вычитаемыя, мы писали ихъ прямо съ обратными знаками.

2) $x^5-a^5 \mid x-a$

» $+ax^4 \qquad x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$

ax^4-a^5

» $+a^2x^3$

$a^2x^3-a^5$

» $+a^3x^2$

$a^3x^2-a^5$

» $+a^4x$

a^4x-a^5

» $+a^5$

0

Подобнымъ образомъ можемъ убѣдиться, что разности: x^3-a^3, x^4-a^4, x^6-a^6...(и вообще x^m-a^m) дѣлятся безъ остатка на разность $x-a$, т.-е. **разность одинаковыхъ степеней двухъ какихъ-нибудь чиселъ дѣлится безъ остатка на разность этихъ чиселъ.**

71. Признаки невозможности дѣленія многочлена на многочленъ. Когда частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ не можетъ быть вы-

ражено многочленомъ (или одночленомъ), то дѣленіе называютъ невозможнымъ. Вотъ признаки невозможнаго дѣленія:

1) **Если показатель главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно**, потому что тогда нельзя получить высшаго члена частнаго. Напр., дѣленіе $(3x^2+5x-8):(2x^3-4)$ невозможно, потому что $3x^2$ не дѣлится на $2x^3$.

2) **Если показатель главной буквы въ низшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно**, потому что тогда нельзя получить низшаго члена частнаго. Напр., дѣленіе $(b^4+5b^3-3b^2+2b):(b^3-2b^2)$ невозможно, потому что $2b$ не дѣлится на $2b^3$.

3) Если показатели главной буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлимаго не меньше соотвѣтственно показателей этой буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлителя, то еще *нельзя сказать, чтобы дѣленіе было возможно*. Въ этомъ случаѣ, чтобы судить о возможности дѣленія, надо приступить къ выполненію самаго дѣйствія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока окончательно не убѣдимся въ возможности или невозможности получить цѣлое частное. При этомъ надо различать два случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0 (тогда дѣленіе возможно), или пока не дойдутъ до такого остатка, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ первый членъ дѣлителя (тогда дѣленіе невозможно).

II. Когда многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то сколько бы ни продолжать

дѣленія, нельзя получить такого остатка, у котораго первый членъ содержалъ бы главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ у перваго члена дѣлителя, потому что при такомъ расположеніи показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, увеличиваясь (см. стран. 80). Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: предположивъ, что цѣлое частное возможно, вычисляютъ заранѣе послѣдній членъ его, дѣля высшій членъ дѣлимаго (т.-е. послѣдній) на высшій членъ дѣлителя (на послѣдній). Найдя высшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго члена. Если при этомъ окажется остатокъ, то дѣленіе невозможно, потому что цѣлое частное не должно содержать членовъ выше того, который получается отъ дѣленія высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя.

Примѣры. 1)

$$\begin{array}{r|l} 10a^4 - 2a^3 \text{ » } + 3a + 4 & 2a^2 - 1 \\ \hline \text{» } \quad + 5a^2 \quad & 5a^2 - a + \frac{5}{2} \\ \hline -2a^3 + 5a^2 + 3a \ldots & \\ \text{» } \quad - a & \\ \hline 5a^2 + 2a + 4 & \\ \text{» } \quad + \frac{5}{2} & \\ \hline 2a + 6\tfrac{1}{2} & \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у котораго первый членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя.

2)

$$\begin{array}{r|l} 4 + 3a \text{ » } - 2a^3 + 10a^4 & -1 + 2a^2 \\ \hline \text{» } \quad + 8a^2 \quad & -4 - 3a - 8a^2 \\ \hline 3a + 8a^2 - 2a^3 & \\ \text{» } \quad + 6a^3 & \\ \hline 8a^2 + 4a^3 + 10a^4 & \\ \text{» } \quad + 16a^4 & \\ \hline 4a^3 + 26a^4 & \end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что, продолжая дѣйствіе, мы получили бы въ частномъ членъ $-4a^3$, тогда какъ послѣдній членъ цѣлаго частнаго долженъ бы быть $5a^2$.

72. Повѣрка дѣленія. Чтобы повѣрить дѣленіе умножаютъ частное на дѣлителя и прибавляютъ къ произведенію остатокъ, если онъ есть; при правильномъ выполненіи дѣйствія въ результатѣ должно получиться дѣлимое. Для примѣра повѣримъ правильность послѣдняго дѣленія предыдущаго параграфа:

$$\begin{array}{lr}
-4-3a-8a^2 & \\
-1+2a^2 & \\
\hline
+4+3a+8a^2 & \\
-8a^2-6a^3-16a^4 & \\
\hline
4+3a & -6a^3-16a^4 \\
 & +4a^3+26a^4 \\
\hline
4+3a & -2a^3+10a^4
\end{array}$$

Упражненія.

Къ § 66.

176. $10a^4 : 5$; **177.** $8x^2y : 4$; **178.** $17a^3 : -a^2$;
179. $4a^8 : 2a^3$. **180.** $10a^3b^2 : 2ab$; **181.** $8a^5x^3y : 4a^3x^2$;
182. $3ax^3 : -5ax$. **183.** $-5mx^3y^5 : mx^3y$;
184. $-ab^3x^4 : -5ab^2x^2$; **185.** $^3/_4a^4b^2c : 7a^3b^2$.
186. $-3{,}2x^{12}y^7z^4 : {}^3/_4x^{10}y^6z^4$; **187.** $a^8b : -{}^5/_6a^5b$;
188. $36a^mbx^3 : 6a^2bx$. **189.** $10(a+b)^5 : 2(a+b)^3$;
190. $12a^{3m}b^3 : 4a^{m+2}b$.

Къ § 67.

191. Объяснить, почему невозможно дѣленіе слѣдующихъ одночленовъ: $3a^3b : 2abc$; $48x^5y^2 : 6x^3yz$; $20a^3b : 4a^3b^2$; $8a^2b^4c : 2a^3bc^2$; $3(a+x)^4 : (a+x)^5$.

Къ § 68.

192. $(27ab-12ac+15ad) : 3a$; **193.** $(4a^2b+6ab^2-12a^3b^5) : {}^3/_4ab$.
194. $(36a^2x^5y^3-24a^3x^4y^2z+4a^4x^3yz^2) : 4a^2x^3y$.
195. $(3a^2x^5y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xyz^2) : 3a^2xy$.

Къ § 70.

196. $(18x^5-54x^4-5x^3-9x^2-26x+16):(3x^2-7x-8)$.
197. $(x^4...-5x^2+4):(x^2-3x+2)$.
198. $(3ax^5-15a^2x^4+6a^3x^3):(x^4-5ax^3+2a^2x^2)$.
199. $(35a^7-36a^6+62a^5-53a^4+4a^3-7a^2-17a+4):(5a^4-3a^3+$ $+4a^2-3a-4)$.
200. $(x^6-a^6):(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)$.
201. $(x^3-a^3):(x-a)$. **202.** $(x^4-a^4):(x-a)$.

Къ §§ 71 и 72.

203. $(3a^6-5a^5+3a^4-2a^3-5a^2+a):(a^3-3a^2+4a-2)$.
204. $(2-3x+4x^2-5x^3):(1-3x+4x^2)$. } (повѣрить дѣйствіе).
205. $(2-x+x^2-5x^3+4x^4):(1+x-2x^2)$ }
206. Раздѣлить $x^5-3ax^4-2a^2x^3+7a^3x^2+a^4x-a^5$ на $x-a$ и убѣдиться, что остатокъ равенъ дѣлимому, въ которомъ x замѣненъ на a.
207. Раздѣлить $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ на $x-1$ и убѣдиться, что остатокъ равенъ дѣлимому, въ которомъ x замѣненъ на 1, т.-е. остатокъ$=a+b+c+d+e$.

Разложеніе многочленовъ на множителей.

73. Укажемъ нѣкоторые простѣйшіе случаи, когда многочленъ можетъ быть разложенъ на множителей, т.-е. можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія или многочлена на одночленъ, или многочлена на другой многочленъ.

I. Если всѣ члены многочлена содержатъ общаго множителя, то его можно вынести за скобки, такъ какъ

$$am+bm+cm=(a+b+c)m.$$

Примѣры. 1) $16a^2b^3x-4a^3b^2x^2=4a^2b^2x(4b-ax)$
2) $x^{n+1}-2x^n+3x^{n-1}=x^{n-1}(x^2-2x+3)$
3) $4m(a-1)-3n(a-1)=(4m-3n)(a-1)$.

II. Если данный трехчленъ есть сумма квадратовъ двухъ чиселъ, увеличенная или уменьшенная удвоеннымъ произ-

веденіемъ этихъ чиселъ. то его можно замѣнить квадратомъ суммы или разности этихъ чиселъ, такъ какъ

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \text{ и } a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Примѣры. 1) $a^2+2a+1=a^2+2a\,.\,1+1^2=(a+1)^2$

2) $x^4+4-4x^2=(x^2)^2+2^2-2(2x^2)=(x^2-2)^2$

3) $-x+25x^2+0{,}01=(5x)^2+(0{,}1)^2-2(5x.0{,}1)$
$=(5x-0{,}1)^2$

4) $(a+x)^2+2(a+x)+1=[(a+x)+1]^2=$
$=(a+x+1)^2$

III. Если данный двучленъ есть квадратъ одного числа безъ квадрата другого числа, то его можно замѣнить произведеніемъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность, такъ какъ

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Примѣры. 1) $m^4-n^4=(m^2)^2-(n^2)^2=(m^2+n^2)(m^2-n^2)=$
$=(m^2+n^2)(m+n)(m-n)$

2) $25x^2-4=(5x)^2-2^2=(5x+2)(5x-2)$

3) $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$

4) $x^2-(x-1)^2=[x+(x-1)][x-(x-1)]=$
$=(x+x-1)(x-x+1)=2x-1$

IV. Иногда многочленъ, состоящій изъ 4-хъ или болѣе членовъ, можно привести къ виду a^2-b^2 или $a^2\pm2ab+b^2$, разбивъ его предварительно на части.

Примѣры. 1) $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=$
$=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p)$

2) $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=$
$=x^2-(y-3)^2=[x+(y-3)][x-(y-3)]=$
$=(x+y-3)(x-y+3).$

V. Иногда члены многочлена можно соединить въ нѣсколько группъ, изъ которыхъ каждая разлагается на множителей; если въ числѣ этихъ множителей окажутся общіе, то ихъ можно вынести за скобки.

Примѣры. 1) $ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=$
$=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$

2) $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
$=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=$
$=(3-x)(2+x)(2-x)$.

VI. Иногда бываетъ полезно ввести вспомогательные члены, или какой-нибудь членъ разложить на два члена.

Примѣры.

1) Разность кубовъ a^3-b^3 легко разложить на множителей, если къ ней добавимъ 2 взаимно сокращающіеся члена: $-a^2b$ и $+a^2b$:

$$a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=$$
$$=a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

2) Такимъ же путемъ можно разложить и сумму кубовъ a^3+b^3:

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=$$
$$=a^2(a+b)-b(a+b)(a-b)=(a+b)[a^2-b(a-b)]=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

3) Трехчленъ $2x^2+3xy+y^2$ легко разлагается на множителей, если его средній членъ разложимъ на 2 члена $+2xy+xy$:

$$2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=$$
$$=2x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(2x+y).$$

Упражненія.

Разложить на множителей слѣдующія выраженія:

I. **208.** $ab+ac$; **209.** $3x+3y-3z$; **210.** $5a^2-3a^3+a$.
211. $4ax-2ay$; **212.** $5a^2x-10a^2x^3+40a^2x^2$.
213. $8a^2b^3x-4ab^2x^3+12ab^4$; **214.** $xy^2-7xy+4x^2y$.
215. $x^m+2x^{m+1}-3x^{m+2}$. **216.** $2x^{2m}-6x^m+4x^{3m}$.
217. $4(a-b)^2x-12(a-b)x$.

II. **218.** $x^2-2xy+y^2$; **219.** m^2+n^2+2mn; **220.** $2ab+a^2+b^2$.
221. $a^2-4ab+4b^2$; **222.** $x^2+8x+16$. **223.** x^2+1+2x;
224. a^2+4-4a; **225.** $-a^2-b^2+2ab$. **226.** $a^2+a+\frac{1}{4}$;
227. $a^4-2a^2b+b^2$. **228.** $25x^4+30x^2y+9y^2$;
229. $0{,}01a^2b^2-0{,}2ab+1$. **230.** $5a^3-20a^2b+20ab^2$.
231. $(x+1)^2+2(x+1)+1$; **232.** $(a+b)^2+4+4(a+b)$.
III. **233.** m^2-n^2; **234.** a^2-1; **235.** $1-a^2$; **236.** x^2-4
237. x^4-1 (на три множителя); **238.** $-9a^2+25b^2$.
239. $^1/_4x^4-^1/_9y^6$; **240.** $81x^4-25$; **241.** $0{,}01a^6-9$.
242. $16a^2b^4c^6-9x^4y^2$; **243.** $3a^5-48ab^8$. **244.** $(a+b)^2-c^2$;
245. $a^2-(b+c^2)$. **246.** $a^2-(b-c)^2$; **247.** $(x+y)^2-(x-y)^2$.
248. a^4-x^4 (на четыре множителя).
IV. **254.** $a^2+2ab+b^2-c^2$; **255.** $a^2-b^2+2bc-c^2$.
256. a^2-b^2+2b-1; **257.** $x^2+1+2x-y^2$.
258. m^2-n^2-2n-1;
259. $-c^2+4a^2-4ab+b^2$. **260.** $25x^4-10x^2y+y^2-9z^4$.
V. **261.** $ax+bx+ay+by$; **262.** $ac-ad-bc+bd$.
263. $ax+ay-dx-by$; **264.** $3x-3y+ax-ay$. **265.** a^2+ $+ab-a-b$;
266. $xz-3y-3z+xy$. **267.** $8a^3-12a^2-18a+27$ (на три множителя).
VI. **267*a*.** Разложить многочлены

$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 \quad \text{и} \quad 8-12a^2+6a^4-a^6$$

посредствомъ группировки перваго члена съ послѣднимъ и третьяго члена съ четвертымъ и примѣняя затѣмъ разложеніе суммы и разности двухъ кубовъ.

Алгебраическія дроби.

74. Опредѣленіе. Алгебраическою дробью называется **частное** отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій въ томъ случаѣ, когда дѣленіе только указано. Такъ: $\frac{a}{b}$, $\frac{a+b}{c-d}$ и тому подобныя выраженія суть алгебраическія дроби. Въ такихъ выраженіяхъ дѣлимое наз. **числителемъ,** дѣлитель — **знаменателемъ,** а то и другое — **членами дроби.**

Важное отличіе алгебраической дроби отъ ариѳметической состоитъ въ томъ, что члены ариѳметической дроби

всегда числа цѣлыя и положительныя, тогда какъ члены алгебраической дроби могутъ быть числами какими угодно. Напр., $^3/_4$ есть ариѳметическая дробь, а выраженіе $\frac{^2/_5}{-3}$ представляетъ собою частный случай алгебраической дроби. Покажемъ, что, несмотря на это различіе, съ дробями алгебраическими можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія указаны въ ариѳметикѣ для дробей ариѳметическихъ.

75. Основное свойство дроби. Величина дроби не измѣнится, если оба ея члена умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, отличное отъ нуля.

Такъ, величина дроби $\frac{^2/_3}{-5}$ не измѣнится, если числителя и знаменателя ея, т.-е. $^2/_3$ и -5, мы умножимъ на одно и то же число, отличное отъ нуля, *напр.*, *на* $-^3/_4$. И дѣйствительно:

$$\frac{^2/_3}{-5}=\frac{2}{3}:(-5)=-\frac{2}{15};\text{ и }\frac{^2/_3\cdot(-^3/_4)}{(-5)(-^3/_4)}=\frac{-^1/_2}{+^{15}/_4}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right):\left(+\frac{15}{4}\right)=-\frac{2}{15}.$$

Чтобы доказать это свойство въ общемъ видѣ (для какихъ угодно чиселъ), умножимъ числителя и знаменателя дроби $\frac{a}{b}$ на какое-нибудь отличное отъ нуля число m и докажемъ, что $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$, т.-е. что частное отъ дѣленія какого-нибудь числа a на какое-нибудь число b равно частному отъ дѣленія произведенія am на произведеніе bm. Обозначимъ частное отъ дѣленія a на b буквою q и частное отъ дѣленія am на bm буквою q', т.-е. положимъ, что

$$\frac{a}{b}=q \qquad [1] \qquad\qquad \frac{am}{bm}=q' \qquad [2].$$

Изъ этихъ равенствъ, согласно опредѣленію дѣленія, выводимъ:

$$a=bq \quad [3], \qquad am=bmq' \quad [4].$$

Умножимъ обѣ части равенства [3], на m; такъ какъ мы при этомъ равныя числа умножимъ на одно и то же число, то, очевидно, получимъ равныя произведенія:

$$am=bqm \quad [5].$$

Сравнивая равенства [5] и [4], находимъ, что каждое изъ произведеній bqm и bmq' равно одному и тому же числу am; значитъ, оба эти произведенія равны между собою:

$$bqm=bmq'$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bm (что возможно сдѣлать, такъ какъ числа b и m не нули); такъ какъ при этомъ мы равныя числа раздѣлимъ на одно и то же число, то, очевидно, получимъ и равныя частныя:

$$\frac{bqm}{bm}=\frac{bmq'}{bm} \quad [6].$$

Но произведеніе bqm, равное произведенію $(bm)q$, при дѣленіи на bm даетъ частное q; равнымъ образомъ, произведеніе bmq' при дѣленіи на bm даетъ частное q'. Значитъ, изъ равенства [6] находимъ:

$$q=q', \quad \text{т.-е.} \quad \frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Число m не должно равняться 0, такъ какъ отъ умноженія членовъ дроби $\frac{a}{b}$ на 0 мы получили бы частное $\frac{0}{0}$, которое равняется любому числу.

Переходя въ доказанномъ равенствѣ отъ правой части къ лѣвой, видимъ, что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія ея членовъ на одно и то же число, отличное отъ нуля.

76. Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду. Умножая оба члена дроби на выбранное надлежа-

щимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы всегда можемъ преобразовать данную дробь такъ, что числитель и знаменатель ея будутъ цѣлыми алгебраическими выраженіями.

Примѣры.

1) $\frac{\frac{3}{4}a}{b}=\frac{3a}{4b}$ (оба члена умножены на 4);

2) $\frac{7a}{2\frac{3}{5}b}=\frac{35a}{13b}$ (на 5)

3) $\frac{\frac{2}{3}a}{\frac{7}{8}b}=\frac{16a}{21b}$ (на 24);

4) $\frac{2a+\frac{5}{6}}{1-a}=\frac{12a+5}{6-6a}$ (на 6);

5) $\frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{ax^2-x}{x-1}$ (на x).

77. Перемѣна знаковъ у членовъ дроби.

1) Перемѣнить знакъ на противоположный и передъ числителемъ, и передъ знаменателемъ дроби—это все равно, что перемѣнить знакъ у дѣлимаго и дѣлителя; отъ этого величина частнаго не измѣняется. Напр.:

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ и } \frac{8}{4}=2;\ \frac{-10}{+2}=-5 \text{ и } \frac{+10}{-2}=-5.$$

2) Перемѣнить знакъ на противоположный передъ какимъ-нибудь однимъ членомъ дроби—все равно что перемѣнить знакъ передъ самою дробью; напр.:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},$$

(при дѣленіи минусъ на плюсъ и плюсъ на минусъ даютъ минусъ).

Этими свойствами дроби иногда пользуются для преобразованія ея; напр.:

$$\frac{-3x}{a-b}=\frac{3x}{-(a-b)}=\frac{3x}{-a+b}=\frac{3x}{b-a};\ \frac{1-a}{2-b}=\frac{-1+a}{-2+b}=\frac{a-1}{b-2};$$

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n).$$

78. Сокращеніе дроби. Если числитель и знаменатель имѣютъ общаго множителя, то на него можно сократить дробь (потому что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія обоихъ ея членовъ на одно и то же число).

Разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе два случая *сокращенія дробей*.

I. Числитель и знаменатель одночлены.

Примѣры. 1) $\frac{12a^2x^3}{15ax^2y}=\frac{4ax}{5y}$ (сокращено на $3ax^2$).

2) $\frac{54a^nb^{n-3}}{72ab^{n-1}}=\frac{3a^{n-1}}{4b^2}$ (сокращено на $18ab^{n-3}$).

Правило. Чтобы сократить дробь, у которой числитель и знаменатель одночлены съ цѣлыми коэффиціентами, находятъ общаго наибольшаго дѣлителя этихъ коэффиціентовъ, приписываютъ къ нему множителями всѣ буквы, которыя входятъ одновременно въ числителя и знаменателя дроби, беря каждую изъ этихъ буквъ съ наименьшимъ показателемъ, съ какимъ она входитъ въ члены дроби; составивъ такое произведеніе, дѣлятъ на него оба члена дроби.

II. Числитель или знаменатель многочлены.

Примѣры:

1) $$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1};$$

2) $$\frac{n-m}{m^2-n^2}=\frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{-1}{m+n}=-\frac{1}{m+n}.$$

Правило. Чтобы сократить дробь съ многочленнымъ числителемъ или знаменателемъ, разлагаютъ, если можно,

многочлены на множителей и сокращаютъ на общихъ множителей, если такіе окажутся.

79. Приведеніе дробей къ одному знаменателю. Умножая оба члена каждой дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы можемъ сдѣлать знаменателей всѣхъ данныхъ дробей одинаковыми. При этомъ могутъ представиться тѣ же случаи, какъ и для дробей ариѳметическихъ, а именно:

1-й случай, когда знаменатели данныхъ дробей, попарно, не имѣютъ общихъ множителей.

Въ этомъ случаѣ оба члена каждой дроби надо умножить на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.

Примѣры: 1) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \ldots \frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{dbf}, \frac{ebd}{fbd};$

2) $\frac{x}{m^2}, \frac{y}{n^2}, \frac{z}{pq} \ldots \frac{xn^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{ym^2pq}{m^2n^2pq}, \frac{zm^2n^2}{m^2n^2pq};$

3) $\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a-b} \ldots \frac{a(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a+b)}{a^2-b^2}.$

2-й случай, когда одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ.

Этотъ знаменатель и будетъ общимъ. Дробь, имѣющую этого знаменателя, надо оставить безъ перемѣны, а члены каждой изъ остальныхъ дробей надо умножить на соотвѣтствующаго **дополнительнаго множителя**, т.-е. на такое алгебраическое выраженіе, которое получится отъ дѣленія общаго знаменателя на знаменателя этой дроби.

Примѣръ. $\frac{x}{a-b}, \frac{y}{a+b}, \frac{z}{a^2-b^2}.$

Знаменатель a^2-b^2 дѣлится на $a-b$ и на $a+b$. Дополнительный множитель для первой дроби есть $a+b$, для вто-

рой $a-b$; послѣ приведенія къ одному знаменателю дроби окажутся:

$$\frac{x(a+b)}{a^2-b^2},\ \frac{y(a-b)}{a^2-b^2},\ \frac{z}{a^2-b^2}.$$

3-й случай, когда знаменатели, всѣ или нѣкоторые, имѣютъ общихъ множителей.

Въ этомъ случаѣ составляютъ произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей, на которые разлагаются знаменатели, при чемъ каждаго множителя берутъ съ наибольшимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ составъ знаменателей. Найдя такое произведеніе, слѣдуетъ затѣмъ выписать для каждой дроби дополнительныхъ множителей (не достающихъ въ ея знаменателѣ для полученія общаго знаменателя) и затѣмъ умножить оба члена каждой дроби на соотвѣтствующихъ дополнительныхъ множителей.

Примѣръ 1-й. $\frac{az}{15x^2y^3},\ \frac{y^2}{12x^3z^2},\ \frac{az}{18xy^2}.$

Общій знам. $=180x^3y^3z^2$. Дополнительные множители: для 1-й: $12xz^2$, для 2-й: $15y^3$, для 3-й: $10x^2yz^2$.

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{12axz^3}{180x^3y^3z^2},\ \frac{15y^5}{180x^3y^3z^2},\ \frac{10ax^2yz^3}{180x^3y^3z^2}.$$

Примѣръ 2-й. $\frac{1}{x^2+2x+1},\ \frac{4}{x+2x^2+x^3},\ \frac{5}{2x+2x^2}.$

Разлагаемъ знаменателей на множителей:

$x^2+2x+1=(x+1)^2$	доп. мн. $2x$
$x+2x^2+x^3=x(x+1)^2$	» » 2
$2x+2x^2=2x(x+1)$	» » $x+1$.
Общ. знам. $=2x(x+1)^2$	

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2},\ \frac{8}{2x(x+1)^2},\ \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2},$$

80. Сложеніе и вычитаніе дробей. По правилу дѣленія многочлена на одночленъ (§ 68) мы можемъ написать:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m},\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налѣво, можемъ вывести слѣдующія правила:

1) **чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно сложить ихъ числителей и подъ суммою подписать того же знаменателя.**

2) **чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, достаточно изъ числителя уменьшаемаго вычесть числителя вычитаемаго и подъ разностью подписать общаго знаменателя.**

Если данныя дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно *ихъ слѣдуетъ привести къ одному знаменателю.*

Примѣры.

(Надъ дробями надписаны дополнительные множители).

1) $\overbrace{\frac{a}{b}}^{df}+\overbrace{\frac{c}{d}}^{bf}+\overbrace{\frac{e}{f}}^{bd}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$; 2) $\overbrace{\frac{3m^2}{10a^2bc}}^{2b}-\overbrace{\frac{5n^2}{4ab^2}}^{5ac}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}$;

3) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{x+1}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$.

$2x-2=2(x-1)$	доп. мн. $= x+1$
$x+1=\ x+1$	» » $=2(x-1)$
$2x^2-2=2(x+1)(x-1)$	» » $=1$.
Общ. знам. $=2(x-1)(x+1)$	

$$\text{Сумма}=\frac{(x+1)(x+1)+(2x-3)2(x-1)-(x^2+3)}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1+(4x^2-6x-4x+6)-x^2-3}{2(x^2-1)}=$$

$$=\frac{4x^2-8x+4}{2(x^2-1)}=\frac{4(x-1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2(x-1)}{x+1}.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ всякое цѣлое алгебраическое выраженіе можно представить въ видѣ дроби, у которой числителемъ служитъ это выраженіе, а знаменатель есть 1, то правила сложенія и вычитанія дробей примѣнимы и къ случаямъ, когда какое-либо данное выраженіе цѣлое. Напр.:

$$3a^2-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2}{1}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^2 \cdot ab}{ab}-\frac{2x}{ab}=\frac{3a^3b-2x}{ab}.$$

81. Умноженіе дробей. Чтобы умножить дробь на дробь, достаточно умножить числителя на числителя и знаменателя на знаменателя и первое произведеніе раздѣлить на второе.

Требуется доказать, что $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Для доказательства положимъ, что частное отъ дѣленія a на b будетъ число q, а частное отъ дѣленія c на d пусть будетъ число q':

$$\frac{a}{b}=q \text{ и } \frac{c}{d}=q'.$$

Тогда: $a=bq$ и $c=dq'$.

Перемножимъ лѣвыя части этихъ двухъ равенствъ между собою и правыя части между собою; такъ какъ при этомъ равныя числа мы умножаемъ на равныя, то и результаты должны быть равны; слѣд.,

$$ac=(bq)(dq')=bqdq'.$$

Въ правой части этого равенства, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ умноженія (§ 33,2°), соединимъ сомножителей въ такія группы:

$$ac=(bd)(qq').$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на bd, найдемъ:

$$\frac{ac}{bd}=qq', \text{ т.-е. } \frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$$

Замѣчаніе. Правило умноженія дробей распространяется и на цѣлыя выраженія; напр.:

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b};\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

82. Дѣленіе дробей. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно умножить числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй и первое произведеніе раздѣлить на второе, т.-е.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Въ этомъ можно убѣдиться повѣркою: умноживъ предполагаемое частное на дѣлителя по правилу умноженія дробей, получимъ дѣлимое:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Такъ какъ $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, то можно высказать другое правило: **чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.**

Замѣчаніе. Правило дѣленія дроби на дробь заключаетъ въ себѣ также и правило дѣленія дроби на цѣлое и цѣлаго на дробь:

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{bc};\quad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}.$$

Упражненія.

Къ § 76.

Привести члены слѣдующихъ дробей къ цѣлому виду:

268. $\frac{^5/_7x}{y}$; $\frac{0,3ab}{m}$; **269.** $\frac{a^2}{1^3/_8b}$; $\frac{m}{2,36n}$; **270.** $\frac{^3/_4ab}{^5/_6x^2}$; **271.** $\frac{3^1/_2a^3}{2^3/_4b}$;

272. $\frac{3x-{}^1/_4}{a-b}$; **273.** $\frac{5a^2+{}^1/_2a-{}^1/_4}{a-1}$; **274.** $\frac{3a-{}^7/_3}{1-\frac{a}{6}}$;

275. $\dfrac{ax+b+\dfrac{c}{x}}{ax+1}$; 276. $\dfrac{1+\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$.

Къ § 77.

Перемѣнить знаки у числителя и знаменателя дробей:

277. $\dfrac{1-x}{-x}$; 278. $\dfrac{-3a^2}{a-b}$; 279. $\dfrac{1-a}{2-b}$; 280. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$.

Не измѣняя величины дробей, поставить знакъ — передъ дробью:

281. $\dfrac{-3a}{6}$; $\dfrac{5x^2}{-3}$; 282. $\dfrac{1-a}{6}$; $\dfrac{a}{2-x}$; 283. $\dfrac{m^2-n^2}{n-m}$.

Къ § 78.

Сократить дроби:

284. $\dfrac{12ab}{8ax}$; 285. $\dfrac{3a^2bc}{12ab^2}$; 286. $\dfrac{48a^3x^2y^4}{45a^2x^2y}$; 287. $\dfrac{120a^4bx^3y^4z}{160a^4bxy^3}$;

288. $\dfrac{27a^m x^2y}{36a^{m+2}x}$; 289. $\dfrac{15a^{m-1}b}{75a^m c}$; 290. $\dfrac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; 291. $\dfrac{14x^2-7ax}{10bx-5ab}$;

292. $\dfrac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$; 293. $\dfrac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}$; 294. $\dfrac{3x^4y^3+9a^2x^2y^3}{4x^5y^2+12a^2x^3y^2}$;

295. $\dfrac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$.

Къ § 79.

Привести къ общему знаменателю слѣдующія дроби:

I. 296. $\dfrac{2}{a}$, $\dfrac{3}{b}$, $\dfrac{1}{2c}$; 297. $\dfrac{7x}{4a^2}$, $\dfrac{2a}{3b^2}$, $\dfrac{4b^2}{5x}$; 298. $\dfrac{5xy}{3a^2bc}$, $\dfrac{3ab^2}{4mx^2y}$;

299. $2a$, $\dfrac{a^2}{x}$ (*указаніе*: представить $2x$ дробью $\dfrac{2a}{1}$);

300. $\dfrac{3}{8ab}$, $3x$, $\dfrac{a}{5x^3}$ (*указаніе*: представить $3x$ дробью $\dfrac{3x}{1}$);

301. $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a-b}$; 302. $\dfrac{a}{1-x}$, $\dfrac{b}{1+x}$, $\dfrac{c}{1+2x}$.

II. 303. $\dfrac{x}{4ab}$, $\dfrac{y}{8a^3b^2}$; 304. $\dfrac{a}{16mx^3y^2}$, $\dfrac{a+b}{2xy}$, $\dfrac{a-b}{4my^2}$;

305. $\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m^2-1} \cdot \frac{3}{m-1}$, **306.** $\frac{3a}{x-1}, \frac{2a}{x^2-2x+1}$;

307. $\frac{a-1}{a^2+4a+4}, \frac{a-2}{a+2}$; **308.** $\frac{1}{x-1}, \frac{2}{2x-1}, \frac{1}{(x-1)(2x-1)}$;

309. $\frac{1}{b}, \frac{a}{a-b}, \frac{2a}{a^2b-b^3}$; **310.** $\frac{a^3}{(a+b)^3}, \frac{ab}{(a+b)^2}, \frac{b}{a+b}$;

III. **311.** $\frac{x}{28a^3b^2}, \frac{y}{21a^2b}$; **312.** $\frac{m}{25a^2x^2y}, \frac{n}{15axy^3}, \frac{p}{60x^3y}$;

313. $\frac{1}{50ax^3}, \frac{2}{15ax^2y}, \frac{y}{75a^2x}, \frac{3x}{10ay}$; **314.** $\frac{a-b}{b}, \frac{2a}{a-b}, \frac{1}{a^2-b^2}$;

315. $\frac{a}{6(a+b)^2}, \frac{b}{8(a-b)}, \frac{ab}{12(a^2-b^2)}, \frac{a^2}{3(ac-bc)}$.

Къ § 80.

316. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}$; **317.** $\frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x}$; **318.** $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}$; **319.** $x+\frac{a}{b}$;

320. $\frac{13x-5a}{4}+\frac{7x-2a}{6}-\frac{x}{17}$; **321.** $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$;

322. $\frac{a}{a+z}+\frac{z}{a-z}$; **323.** $\frac{1+3x}{1-3x}-\frac{1-3x}{1+3x}$; **324.** $\frac{8-x}{6}+x+\frac{5}{3}-\frac{x+6}{2}+\frac{x}{3}$;

325. $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1-a}+\frac{2}{1+a^2}$; **326.** $\frac{1}{x(x+1)}-\frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{1}{x(x+2)}$;

327. $\frac{3x^2-x+12}{x^2-9}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}$; **327a.** $\frac{8}{a-2b}-\frac{2a-4b}{a^2-4b^2}+\frac{3a-3b}{2b+a}$;

327b. $\frac{1}{x-1}-\frac{2x+5}{x^2-2x+1}+\frac{2+3x-5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}$;

327c. $\frac{2a}{(a^2+1)^2-a^2}+\frac{1}{a^2-a+1}-\frac{1}{a^2+a+1}$.

Къ §§ 81 и 82.

328. $\frac{4x^2y^2}{15p^4q^9} \cdot 45p^2q^2$. **329.** $\left(-\frac{3x}{5a}\right) \cdot \frac{10ab}{7x^3}$. **330.** $\frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}$.

331. $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. **332.** $\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{(x+2)^2}$. **333.** $\frac{2a}{2b-c} \cdot \left(\frac{b+c}{4}-\frac{c}{2}\right)$.

334. $\left(a+\frac{ab}{a+b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$. **335.** $\frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4} : \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$. **336.** $\frac{12a^3b^2}{5mp} : 4ab^2$.

337. $81a^3b^2 : \frac{27ab^2}{5x^2y}$. **338.** $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{5a^2+5b^2}{a+b}$. **339.** $\left(x+\frac{xy}{x-y}\right) : \left(x-\frac{xy}{x+y}\right)$.

Упростить слѣдующія выраженія:

340. $\dfrac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$. 341. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}:\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}$. 342. $\dfrac{a-\dfrac{a-b}{1+ab}}{1+\dfrac{a(a-b)}{1+ab}}$.

343. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right):\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

Уравненія первой степени.

Общія начала рѣшенія уравненій.

83. Равенство, тождество, уравненіе. Два числа или два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ $=$, составляютъ **равенство.** Числа эти или выраженія называются **частями** равенства: то, что стоитъ налѣво отъ знака $=$, составляетъ **лѣвую** часть, а то, что стоитъ направо отъ этого знака, составляетъ **правую** часть равенства. Напр., въ равенствѣ: $a+2a=3a$ выраженіе $a+2a$ есть лѣвая часть, а $3a$—правая часть.

Если обѣ части равенства представляютъ собою тождественныя алгебраическія выраженія (§ 3), т.-е. такія, которыя при всевозможныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ имѣютъ одну и ту же численную величину, то такія равенства наз. **тождествами;** таковы, напр., равенства:

$$(a+b)m=am+bm;\quad (a+1)^2=a^2+2a+1;\quad a=a.$$

Тождествомъ наз. также и такое равенство, въ которое входятъ только числа, выраженныя цыфрами, и у которыхъ лѣвая и правая части представляютъ собою одно и то же число; таковы, напр., равенства:

$$(2+1)^2=(5-2)^2;\quad \text{или}\quad 3=3.$$

Всякое буквенное тождество, послѣ подстановки на мѣсто буквъ какихъ-нибудь чиселъ, обращается въ численное тождество.

Если въ равенство входитъ одна или нѣсколько буквъ такихъ, которымъ для того, чтобы это равенство обратилось въ тождество, нельзя приписывать всевозможныя численныя *значенія, а только нѣкоторыя*, то такое равенство наз. **уравненіемъ.** Приведемъ 3 примѣра такихъ равенствъ:

1) Равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе, потому что оно обращается въ тождество не при всякомъ численномъ значеніи буквы x, а только при $x=2$ (при этомъ значеніи оно даетъ: $3 \cdot 2+5=2 \cdot 2+7$, т.-е. $11=11$).

2) Равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе, потому что оно обращается въ тождество не при всякихъ значеніяхъ буквъ x и y, а только при нѣкоторыхъ (напр., при $x=2$ и $y=8$ оно даетъ тождество: $12=12$, тогда какъ при $x=2$ и $y=3$ оно въ тождество не обращается).

3) Равенство $ax=b$, въ которомъ буквы a и b означаютъ какія-нибудь данныя числа, есть также уравненіе, такъ какъ оно обращается въ тождество (буквенное) не при всякомъ значеніи x, а только при $x=b/a$.

Такія буквы въ уравненіи, которымъ нельзя приписывать всевозможныя численныя значенія, называются **неизвѣстными** уравненія; онѣ берутся обыкновенно изъ послѣднихъ буквъ алфавита: x, y, z...

Уравненія могутъ быть съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и болѣе неизвѣстными. Такъ, равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ, а равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе съ 2 неизвѣстными.

Тѣ числа, которыя, подставленныя въ уравненіе вмѣсто его неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, называются **корнями** уравненія (или его **рѣшеніями**); о такихъ числахъ принято говорить, что они **удовлетворяютъ** уравненію. Напр., 2 есть корень уравненія $3x+5=2x+7$, потому что при $x=2$ это уравненіе обращается въ тожде-

ство $3 \cdot 2+5=2 \cdot 2+7$. Уравненіе $2x+y=10x-y$ имѣетъ корни $x=2$, $y=8$ и многіе другіе.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всѣ его корни.

84. Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій. Возьмемъ для примѣра такія 2 задачи.

Задача 1. Старшему брату 15 лѣтъ, а младшему 9. Сколько лѣтъ тому назадъ первый былъ строе старше второго?

Назовемъ неизвѣстное число лѣтъ буквою x. Предположимъ, что x найдено, и мы желаемъ повѣрить, удовлетворяетъ ли найденное число требованіямъ задачи. Тогда разсуждаемъ такъ: x лѣтъ тому назадъ старшему брату было не 15 лѣтъ, какъ теперь, а $15-x$; младшему брату тогда было не 9 лѣтъ, какъ теперь, а $9-x$. Условіе задачи требуетъ, чтобы $15-x$ было втрое болѣе $9-x$; значитъ, если $9-x$ умножимъ на 3, то мы должны получить число, равное $15-x$; поэтому для x можно взять только такое число, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$(9-x)3=15-x.$$

Если сумѣемъ рѣшить это уравненіе, то задача будетъ рѣшена.

Задача 2. Изъ двухъ сортовъ чаю составлено 32 фунта смѣси; фунтъ перваго сорта стоитъ 3 руб., фунтъ второго сорта 2 р. 40 к. Сколько фунтовъ взято отъ того и другого сорта, если фунтъ смѣшаннаго чаю стоитъ 2 р. 85 к. (безъ прибыли и убытка)?

Обозначимъ буквою x число фунтовъ перваго сорта потребное для составленія смѣси. Тогда число фунтовъ второго сорта должно быть $32-x$. Такъ какъ фунтъ перваго сорта стоитъ 3 рубля, а фунтъ второго сорта стоитъ 2 р. 40 к.$=2,4$ рубля, то всѣ x фунтовъ перваго сорта будутъ

стоить $3x$ руб., а всѣ $32-x$ фунтовъ второго сорта будутъ стоять $2,4\ (32-x)$ руб.; слѣд., стоимость всей смѣси окажется $3x+2,4(32-x)$ руб. Но съ другой стороны, если фунтъ смѣшаннаго чаю продавать по 2 р. 85 к.$=2,85$ руб., то вся смѣсь будетъ стоить $2,85\ .\ 32=91,2$ руб. Значитъ, для x можно взять только такое число, которое удовлетворитъ уравненію:

$$3x+2,4(32-x)=91,2.$$

Рѣшеніе данной задачи свелось такимъ образомъ къ рѣшенію составленнаго уравненія.

Только практика научаетъ, какъ, исходя изъ вопроса и условій задачи, составить одно или нѣсколько уравненій; алгебра имѣетъ цѣлью указать способы рѣшенія уравненій. Въ этомъ состоитъ другое назначеніе этой науки, еще болѣе важное, чѣмъ преобразованіе алгебраическихъ выраженій (см. § 4).

85. Нѣкоторыя свойства равенствъ. Рѣшеніе уравненій основано на нѣкоторыхъ свойствахъ равенствъ вообще и уравненій въ частности; эти свойства мы теперь и разсмотримъ.

Всякое равенство, разсматриваемое въ алгебрѣ, мы можемъ сокращенно выразить такъ: $a=b$, если буквою a обозначимъ численную величину лѣвой части равенства и буквою b численную величину правой его части. Замѣтивъ это, мы можемъ главнѣйшія свойства равенствъ выразить слѣдующими очевидными истинами (нѣкоторыми изъ нихъ мы уже пользовались раньше):

1) Если $a=b$, то и $b=a$; т.-е. **части равенства можно переставлять.**

2) Если $a=b$ и $c=b$, то $a=c$; т.-е. если **два числа равны порознь одному и тому же третьему числу, то они равны и между собою.**

3) Если $a=b$ и $m=n$, то

$$a+m=b+n,\ a-m=b-n,\ am=bn;$$

т.-е. **если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя числа;**

если отъ равныхъ (чиселъ) **отнимемъ равныя** (числа), **то и получимъ равныя** (числа);

если равныя умножимъ на равныя, то и получимъ равныя.

4) Если $a=b$ и $m=n$, то $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$, если только числа m и n не нули (дѣленіе на нуль невозможно, § 35):

т.-е. **если равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля, то и получимъ равныя числа.**

86. Равносильныя уравненія. Уравненія называется равносильными, если они имѣютъ одни и тѣ же корни. Напр., два уравненія:

$$x^2+2=3x \text{ и } x^2-3x+2=0$$

равносильны, потому что у нихъ одни и тѣ же корни (именно $x=2$ и $x=1$).

Относительно равносильности уравненій мы разъяснимъ слѣдующія 2 истины, на которыхъ основано рѣшеніе уравненій; при этомъ для простоты мы будемъ предполагать, что рѣчь идетъ объ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ.

1) Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ, или отъ нихъ отнимемъ, одно и то же число, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Возьмемъ, напр., уравненіе: $2x+5=3x$ и приложимъ къ обѣимъ его частямъ какое-нибудь одно и то же число, напр., 10; тогда получимъ новое уравненіе: $2x+5+10=3x+10$. Разъяснимъ, что два уравненія:

$$2x+5=3x \text{ и } 2x+5+10=3x+10$$

должны имѣть одни и тѣ же корни. И дѣйствительно, при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ x, при которыхъ сумма $2x+5$

дѣлается равной $3x$, будутъ также равны и суммы $2x+5+10$ и $3x+10$ (если къ равнымъ придадимъ равныя, то и получимъ равныя). Обратно, при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ x, при которыхъ суммы $2x+5+10$ и $3x+10$ дѣлаются равными, будутъ также равны и выраженія $2x+5$ и $3x$ (если отъ равныхъ отнимемъ равныя, то и получимъ равныя). Отсюда слѣдуетъ, что оба уравненія должны имѣть одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны. Совершенно такъ же убѣдимся, что отъ обѣихъ частей уравненія можно отнять одно и то же число.

2) Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число (отличное отъ нуля), то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Возьмемъ, напр., уравненіе: $2x+5=3x$ и умножимъ обѣ его части на какое-нибудь число, кромѣ 0, напр., на 10; разъяснимъ, что уравненія:

$$2x+5=3x \text{ и } (2x+5)10=3x\,.\,10$$

имѣютъ одни и тѣ же корни.

Дѣйствительно, при всѣхъ тѣхъ численныхъ значеніяхъ x, при которыхъ выраженіе $2x+5$ дѣлается равнымъ $3x$, равны также произведенія $(2x+5)\,.\,10$ и $3x\,.\,10$ (если равныя умножимъ на равныя, то и получимъ равныя). Обратно, при всѣхъ тѣхъ значеніяхъ x, при которыхъ произведеніе $(2x+5)\,.\,10$ дѣлается равнымъ произведенію $3x\,.\,10$, равны также и выраженія $2x+5$ и $3x$ (если равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля, то и получимъ равныя числа). Значитъ, оба уравненія имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны. Такъ же *убѣдимся, что обѣ части уравненія можно дѣлить* на одно и то же число, отличное отъ 0.

Если обѣ части уравненія $2x+5=3x$ умножимъ на 0, то получимъ $(2x+5)\,.\,0=3x\,.\,0$. Это равенство есть то-

ждество, потому что, какія бы числа мы ни подставляли на мѣсто x, всегда получимъ $0=0$; данное же уравненіе обращается въ тождество только при $x=5$; значитъ, отъ умноженія на 0 не получается равносильнаго уравненія. О дѣленіи на 0 нечего и говорить, такъ какъ такое дѣленіе невозможно; значитъ, части уравненія умножать или дѣлить на нуль нельзя.

87. Слѣдствія. Изъ указанныхъ двухъ истинъ можно вывести слѣдующія слѣдствія, которыя понадобятся намъ для рѣшенія уравненій.

I. Всякій членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, перемѣнивъ передъ такимъ членомъ знакъ на противоположный.

Напримѣръ, если къ обѣимъ частямъ уравненія $8+x^2=$ $=7x-2$ прибавимъ по 2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2=7x-2 \\ +2 \qquad +2 \\ \hline 8+x^2+2=7x \end{array}$$

Оказывается, что членъ -2 изъ правой части перешелъ въ лѣвую съ противоположнымъ знакомъ $+$.

Если вычтемъ изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія по x^2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2+2=7x \\ -x^2 \qquad -x^2 \\ \hline 8+2=7x-x^2 \end{array}$$

Оказывается, что членъ $+x^2$ перешелъ изъ лѣвой части въ правую съ противоположнымъ знакомъ.

Можно всѣ члены уравненія перенести въ одну его часть, напр., въ лѣвую; въ такомъ случаѣ другая часть обратится въ нуль. Такъ, перенеся въ ур. $2x^2=6+4x$ всѣ члены въ лѣвую часть, получимъ: $2x^2-4x-6=0$.

II. Если два одинаковые члена съ одинаковыми знаками стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія, то такіе члены можно совсѣмъ отбросить. Напр.:

$$6x+3=x^2+3,\ 7x^2-x=7-x.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей перваго уравненія по 3 и приложивъ къ обѣимъ частямъ второго уравн. по x, получимъ:

$$6x=x^2,\ 7x^2=7.$$

Такимъ образомъ, члены $+3$ и $+4$ въ первомъ уравненіи и $-x$ и $-x$ во второмъ уравненіи уничтожились.

III. Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго дѣлителя, не равнаго нулю, то уравненіе можно на него сократить. Напр.:

$$60x-160=340-40x.$$

Замѣтивъ, что всѣ члены этого уравненія дѣлятся на 20, раздѣлимъ ихъ на этого общаго дѣлителя; тогда мы получимъ уравненіе болѣе простое:

$$3x-8=17-2x.$$

IV. Передъ всѣми членами уравненія можно перемѣнить знаки на противоположные, такъ какъ это равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на одно и то же число, именно на-1 Напр., умноживъ обѣ части уравненія:

$$-7x+2=-8-x^2$$

на -1, мы получимъ равносильное уравненіе:

$$7x-2=8+x^2$$

съ противоположными знаками.

V. Уравненіе можно освободить отъ знаменателей. Напр.:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=7\frac{1}{6}.$$

Обративъ $7\frac{1}{6}$ въ неправильную дробь, получимъ $\frac{43}{6}$; теперь приведемъ всѣ члены къ одному знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12} \text{ или } \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Отбросивъ общаго знаменателя, мы тѣмъ самымъ умножимъ обѣ части уравненія на одно и то же, отличное отъ нуля, число 12; отъ этого получимъ уравненіе, равносильное данному и не содержащее дробныхъ членовъ:

$$14x-6-(3x-15)=86 \quad \text{или} \quad 14x-6-3x+15=86.$$

88. Можно ли обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстное. Положимъ, что обѣ части какого-нибудь уравненія, напр., $2x=8$, мы умножили на выраженіе, содержащее неизвѣстное x, напр., на $x-3$. Тогда будемъ имѣть 2 уравненія:

$$2x=8 \ (1) \quad \text{и} \quad 2x(x-3)=8(x-3) \ (2)$$

Казалось бы, что эти 2 уравненія должны быть равносильными; однако *это не такъ, потому что число* $x-3$ не при всякомъ значеніи x отлично отъ нуля, а на нуль умножать части уравненія мы не имѣемъ права. И дѣйствительно, уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень: $x=4$. Этотъ корень принадлежитъ и уравненію (2), такъ какъ онъ обращаетъ его въ тождество:

$$2 \,.\, 4(4-3)=8(4-3), \text{ т.-е. } 8 \,.\, 1=8 \,.\, 1, \text{ или } 8=8.$$

Но уравненіе (2) имѣетъ еще свой особый корень: $x=3$, при которомъ множитель $x-3$ обращается въ нуль, и уравненіе (2) обращается въ тождество:

$$6 \,.\, 0=8 \,.\, 0, \quad \text{т.-е.} \quad 0=0.$$

Такимъ образомъ, уравненіе (1) имѣетъ одинъ корень ($x=4$), тогда какъ уравненіе (2) имѣетъ 2 корня ($x=4$ и $x=3$), изъ которыхъ одинъ **посторонній** для даннаго уравненія (1). Значитъ, уравненія (1) и (2) не равносильны.

Вообще, **отъ умноженія или отъ дѣленія обѣихъ частей уравненія на одно и то же алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя, можетъ получиться уравненіе, не равносильное первому.**

Замѣчаніе. Чтобы освободить уравненіе отъ знаменателей, нужно, какъ мы говорили (§ 87, V), привести всѣ члены уравненія къ общему знаменателю и затѣмъ его отбросить. Теперь мы должны добавить, что такое отбрасываніе общаго знаменателя (равносильное умноженію на него обѣихъ частей уравненія) возможно безъ всякихъ оговорокъ лишь въ томъ случаѣ, когда отбрасываемый знаменатель не содержитъ въ себѣ неизвѣстныхъ. Если же, какъ это часто бываетъ, неизвѣстныя входятъ и въ знаменателей дробныхъ членовъ уравненія, то, приведя всѣ члены къ общему знаменателю и отбросивъ его, мы должны еще изслѣдовать, не вводимъ ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній. Ниже приведены примѣры (§ 90, примѣры 2-й и 3-й), на которыхъ уясняется, какъ слѣдуетъ поступать въ такихъ случаяхъ.

Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

89. Подраздѣленіе уравненій. По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя неизвѣстными, съ тремя и болѣе неизвѣстными. Кромѣ того, уравненія раздѣляются по степенямъ неизвѣстныхъ: уравненія первой степени, уравненія второй степени и т. д.

Чтобы судить о степени даннаго уравненія, въ немъ нужно предварительно сдѣлать слѣдующія преобразованія: раскрыть скобки, уничтожить знаменателей, перенести всѣ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Когда всѣ эти преобразованія выполнены (на самомъ дѣлѣ или только въ умѣ), то:

степенью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ наз. наибольшій изъ показателей при неизвѣстномъ;

степенью уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными наз. сумма показателей при неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма наибольшая.

Такимъ образомъ, уравненіе $3x—5x^2=4$ есть уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ; уравненіе $5x^2y—$ $—3xy+8y=0$ есть уравненіе третьей степени съ 2 неизвѣстными.

90. Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Для примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{2(x—5)}{3}=\frac{3(2—x)}{2}—x.$$

Чтобы найти число x, выполняемъ слѣдующія преобразованія:

1) раскрываемъ скобки: $\frac{2x—10}{3}=\frac{6—3x}{2}—x$;

2) освобождаемъ уравн. отъ знам.: $4x—20=18—9x—6x$;

3) переносимъ неизвѣстные члены въ одну часть, а извѣстные въ другую: $4x+9x+6x=18+20$;

4) дѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ: $19x=38$;

5) дѣлимъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ:

$$\frac{19x}{19}=\frac{38}{19} \text{ или } x=2.$$

Когда корень уравненія найденъ, полезно повѣрить правильность рѣшенія; для этого подставимъ въ данное (не преобразованное) уравненіе вмѣсто x найденное число; если послѣ подстановки получится тождество, то уравненіе рѣшено правильно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное число 2, получимъ:

$$\frac{2(2—5)}{3}=\frac{3(2—2)}{2}—2, \text{ т.-е. } —2=—2.$$

Значитъ, уравненіе рѣшено правильно.

91. Приведемъ еще нѣсколько примѣровъ, представляющихъ нѣкоторыя особенности.

Примѣръ 1. Знаменатели не содержитъ неизвѣстнаго.

$$\frac{\frac{8x}{3}-4}{9}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{7-\frac{x-3}{2}}{3}-\frac{8}{9}.$$

Для рѣшенія этого уравненія сначала приведемъ члены каждой дроби къ цѣлому виду (см. § 76):

$$\frac{8x-12}{27}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{14-x+3}{6}-\frac{8}{9}.$$

Найдя общаго знаменателя 54, надписываемъ надъ каждымъ членомъ уравненія дополнительнаго множителя:

$$\frac{\overset{2}{\overbrace{8x-12}}}{27}-\frac{\overset{9}{\overbrace{5x-3}}}{6}+\overset{54}{\overbrace{x}}=\frac{\overset{9}{\overbrace{17-x}}}{6}-\frac{\overset{6}{\overbrace{8}}}{9}.$$

Затѣмъ приводимъ къ общему знаменателю всѣ члены уравненія, отбрасываемъ его и поступаемъ далѣе, какъ обыкновенно:

$$16x-24-45x+27+54x=153-9x-48$$

$$16x-45x+54x+9x=153-48+24-27;\ 34x=102;\ x=3.$$

Повѣрка: $\frac{8-4}{9}-2+3=\frac{7}{3}-\frac{8}{9}$, т.-е. $\frac{13}{9}=\frac{13}{9}$.

Примѣръ 2. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя не вводитъ посторонняго корня.

$$\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Чтобы удобнѣе привести всѣ члены этого уравненія къ общему знаменателю, перемѣнимъ въ знаменателѣ второй дроби знаки на обратные, а чтобы отъ этого не измѣнилась величина дроби, перемѣнимъ знакъ передъ дробью (§ 77):

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Такъ какъ $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$, то это и есть общій знаменатель; дополнительные множители будутъ: для первой дроби $2x+1$, для третьей $2x-1$;

$$(2x+1)^2-8=(2x-1)^2;\quad 4x^2+4x+1-8=4x^2-4x+1:$$

$$8x=8;\quad x=1.$$

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось откинуть общаго знаменателя $4x^2-1$, т.-е., другими словами, пришлось обѣ части уравненія умножить на выраженіе $4x^2-1$, содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ убѣдиться, не будетъ ли найденный корень постороннимъ, т.-е. не обращаетъ ли онъ въ 0 выраженіе $4x^2-1$, на которое намъ пришлось умножить обѣ части даннаго уравненія. Подставивъ 1 на мѣсто x въ выраженіе $4x^2-1$, мы получаемъ 3, а не 0. Значитъ, найденный корень не есть посторонній. И дѣйствительно, данное уравненіе при $x=1$ обращается въ тождество:

$$\frac{3}{1}+\frac{8}{-3}=\frac{1}{3};\ 3-2^2/_3=\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Примѣръ 3. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя вводитъ посторонній корень.

$$3+\frac{1}{x-2}=\frac{4x-7}{x-2}.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, получимъ:

$$3x-6+1=4x-7;\quad 3x-4x=-7+6-1;\quad -x=-2.$$

Умноживъ обѣ части уравненія на -1, найдемъ: $x=2$.

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей, намъ пришлось умножить обѣ части его на выраженіе $x-2$, содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ рѣшить, не будетъ ли найденный корень постороннимъ. Подставивъ 2 на мѣсто x въ выраженіе $x-2$, получимъ 0. Изъ этого заключаемъ,

что корень $x=2$ можетъ быть постороннимъ. Чтобы рѣшить это окончательно, надо сдѣлать подстановку:

$$3+\frac{1}{0}=\frac{1}{0}.$$

Въ такомъ видѣ равенство ничего не выражаетъ, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно. Значитъ, рѣшеніе $x=2$ является постороннимъ для даннаго уравненія, которое совсѣмъ не имѣетъ корней.

Примѣръ 4. Уравненіе, приводящееся къ тождеству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-25=\frac{5}{6}(x-30).$$

По освобожденіи отъ знаменателей, получимъ:

$$3x+2x-150=5(x-30),$$

или

$$5x-150=5x-150,$$

или

$$5x-5x=150-150.$$

Это равенство есть *тождество*, т.-е. оно вѣрно при всякомъ значеніи x. Значитъ, уравненіе имѣетъ произвольные корни.

Примѣръ 5. Уравненіе, приводящееся къ невозможному равенству.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5.\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)+7.$$

По раскрытіи скобокъ и освобожденіи отъ знаменателей, находимъ:

$$6x+4x=15x-5x+84$$

или

$$10x=10x+84$$

или

$$10x-10x=84.$$

Такъ какъ это равенство невозможно, то уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

Упражненія.

Рѣшить слѣдующія уравненія:

344. $8x-5=13-7x$; **345.** $29+2x=3(x-7)$;

346. $13^3/_4-x/_2=2x-8^3/_4$. **347.** $3{,}25x-(5{,}007+x)=0{,}2-0{,}34x$;

348. $3(x+2)-2(x-4)=21$. **349.** $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{x}{2}-1=\frac{5(x-4)}{6}+3$;

350. $\frac{7,53x}{18}-100=\frac{2x}{5}+3,86-\frac{x}{6}$. **351.** $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}-1$;

352. $5x-\{8x-3[16-6x-(4-5x)]\}=6$.

353. $\frac{x(3x+1)}{2}-\frac{x(2x+1)}{3}+\frac{x(x+1)}{12}=x^2+\frac{2}{15}-\frac{x(x+5)}{12}$;

354. $ax+b=cx+d$. **355.** $\frac{ab}{x}-\frac{1}{x}=bc+d$; **356.** $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{12}{x^2-1}$.

357. $\frac{x-m}{m-n}-\frac{x-m}{m+n}=\frac{2mx}{m^2-n^2}$; **358.** $\frac{x}{a}+\frac{a}{a+b}+\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{x}{a-b}+1$.

359. $\frac{3x}{4}-\frac{2(x-2)}{5}=\frac{7x+16}{20}$ (приводится къ тождеству $0=0$).

360. 1°. $\frac{x}{2}-4+\frac{x}{3}=7+\frac{5x}{6}$
2°. $\frac{5x+1}{6}+\frac{x+3}{4}=x+1+\frac{x-3}{12}$
(приводятся къ невозможному равенству).

361. Опредѣлить, какія изъ нижеслѣдующихъ равенствъ суть тождества и какія уравненія; рѣшить уравненія:

1°. $8x+3=(x+2)^2-x^2+4x-1$; 2°. $\frac{3x-1}{8}=4$;

3°. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$; 4°. $(2x+1)^2+(x-1)^2=5(x^2+1)$.

362. Сумма двухъ чиселъ равна 2588, а разность ихъ 148; найти эти числа.

363. Раздѣлить 1800 на двѣ части такія, чтобы меньшая составляла $^2/_7$ бóльшей.

364. Если къ числителю и знаменателю дроби прибавить по 8, то получится дробь, равная $^3/_4$. Какова эта дробь, если ея числитель меньше знаменателя на 5 единицъ?

365. Капиталъ, отданный въ ростъ по $4^1/_2$%, черезъ годъ обратился въ 13167 руб. Какъ великъ этотъ капиталъ?

366. Продавъ товаръ за 294 руб. 30 коп. ,купецъ получилъ 9% прибыли. Солько ему самому стоитъ товаръ?

367. Если къ капиталу, приносящему 4%, присоединить весь доходъ, который съ него получается за 5 лѣтъ, то составится сумма 8208 руб. Какъ великъ этотъ капиталъ?

368. Я задумалъ число, затѣмъ умножилъ его на 7, прибавилъ къ произведенію 3, раздѣлилъ полученный результатъ

на 2 и отъ частнаго отнялъ 4; тогда у меня осталось 15. Какое число я задумалъ?

369. Летитъ стадо гусей, а навстрѣчу ему еще гусь. Гусь спрашиваетъ: «Сколько васъ всѣхъ?» Ему отвѣчаютъ: «если бы насъ было столько, да еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты съ нами, гусь, тогда насъ было бы ровно 100 гусей». Сколько въ стадѣ гусей?

370. Два поѣзда выходятъ одновременно навстрѣчу другъ другу: одинъ изъ города *A*, другой изъ города *B*. Первый поѣздъ проходитъ каждый часъ 53 версты, второй 35; разстояніе между городами *A* и *B* равно 140 верстамъ. На какомъ разстояніи отъ города *A* поѣзда встрѣтятся?

371. Изъ города *A* отбылъ полкъ солдатъ къ городу *B*, отстоящему отъ *A* на 345 верстъ; черезъ три дня послѣ его отправленія къ городу *A* направился изъ *B* другой полкъ, навстрѣчу первому. Первый полкъ ежедневно проходитъ по 35 верстъ, второй— по 45 верстъ. Черезъ сколько дней по отправленіи перваго полка они встрѣтятся?

372. Купецъ, имѣя вино двухъ сортовъ: по 72 коп. и по 40 коп. за бутылку, желаетъ составить смѣсь въ 50 бутылокъ, цѣною по 60 коп. за бутылку. Сколько онъ долженъ взять вина того и другого сорта?

373. Бочка съ виномъ имѣетъ три крана; если открыть только одинъ первый кранъ, то вся бочка опорожнится въ 2 часа; если открыть только одинъ второй кранъ, бочка опорожнится въ 3 часа; черезъ одинъ третій кранъ все вино вытекаетъ въ 4 часа. Во сколько времени опорожнится вся бочка, если открыть три крана одновременно?

374. Фабрикантъ долженъ приготовить кусокъ полотна; одинъ рабочій могъ бы его приготовить въ 6 дней, другой рабочій приготовилъ бы его въ 8 дней и третій въ 10 дней. Они проработали вмѣстѣ въ теченіе 2 дней, послѣ чего осталось еще приготовить 26 аршинъ полотна. Сколько аршинъ было въ кускѣ?

375. Бассейнъ наполняется тремя фонтанами, которые, дѣйствуя отдѣльно, могли бы наполнить бассейнъ: одинъ въ $1^1/_3$ часа, другой въ $3^1/_3$ часа и третій въ 5 часовъ. Во сколько времени наполнится бассейнъ, если дѣйствуютъ всѣ три фонтана одновременно?

376. Нѣкто условился платить своему слугѣ въ годъ 240 руб. жалованья и сверхъ того долженъ дать ему ливрею; но слуга

прослужилъ только 5 мѣсяцевъ и при расчетѣ получилъ отъ хозяина 37 руб. и ливрею. Во сколько рублей цѣнилась ливрея?

377. Подрядчикъ нанялъ рабочаго съ условіемъ платить ему за каждый рабочій день по $1^{1}/_{2}$ руб. и удерживать съ него по 60 коп. за каждый день прогула. По прошествіи 50 дней, рабочій при расчетѣ получилъ только 49 руб. 80 коп. Сколько дней изъ этихъ 50-ти рабочій прогулялъ?

378. Крестьянинъ отправился въ городъ продавать яйца; сначала онъ продалъ половину всего числа яицъ и еще 4 яйца; потомъ продалъ половину того, что осталось, и еще 2 яйца; затѣмъ продалъ половину того, что осталось послѣ второй продажи, и сверхъ того еще 6 яицъ; послѣ третьей продажи у него осталось 2 яйца не проданными. Сколько онъ принесъ яицъ для продажи?

379. Игрокъ сыгралъ три игры; въ первой онъ проигралъ половину того, что имѣлъ; во второй проигралъ $^{2}/_{3}$ того, что у него осталось послѣ первой игры; въ третьей игрѣ онъ выигралъ въ 4 раза болѣе, чѣмъ у него оставалось послѣ двухъ первыхъ игръ. По окончаніи третьей игры, оказалось, что въ результатѣ игрокъ проигралъ за всю игру 15 рублей. Сколько рублей имѣлъ онъ въ началѣ игры?

380. Найти двухзначное число по слѣдующимъ условіямъ: сумма его цыфръ равна 8; если цыфры числа переставить и изъ полученнаго послѣ этой перестановки числа вычесть прежнее, то въ остаткѣ окажется 36.

381. Сумма цыфръ двухзначнаго числа равна 15. Если взять $^{1}/_{4}$ этого числа и приложить къ ней 45, то получится число, написанное тѣми же цыфрами, но въ обратномъ порядкѣ. Найти это число.

382. Найти трехзначное число, зная, что число десятковъ въ немъ въ 3 раза болѣе числа сотенъ, что число единицъ менѣе числа десятковъ на 1 и что, написавъ цыфры его въ обратномъ порядкѣ, мы получимъ число, превосходящее искомое на 297.

383. Гіеронъ, царь Сиракузскій, заказалъ мастеру приготовить ему корону изъ 10 фунтовъ золота. Когда корона была готова, Гіеронъ заподозрилъ мастера въ обманѣ, предполагая, что онъ скрылъ часть золота, замѣнивъ его серебромъ. Окончательно рѣшить этотъ вопросъ онъ поручилъ Архимеду. Архимедъ, послѣ нѣкоторыхъ опытовъ, не только убѣдился въ обманѣ мастера, но и опредѣлилъ, сколько въ коронѣ осталось чистаго золота и сколько было подбавлено серебра. При

этомъ онъ основывался на слѣдующихъ опытныхъ данныхъ: чистое золото, погруженное въ воду, дѣлается въ немъ легче на 0,052 своего вѣса, чистое серебро теряетъ въ водѣ 0,099 своего вѣса, а корона, вѣсившая въ воздухѣ 10 фунтовъ, въ водѣ вѣсила только $9^3/_8$ фунта. Какъ рѣшить задачу, предложенную Архимеду?

384. Имѣются два сосуда: одинъ наполненъ виномъ, другой водой; объемъ перваго 5 ведеръ, объемъ второго 3 ведра. Отливаютъ изъ перваго сосуда нѣкоторое количество вина и столько же отливаютъ воды изъ второго сосуда. Отлитое вино переливаютъ въ сосудъ съ водой, а отлитую воду—въ сосудъ съ виномъ. Послѣ этого въ обоихъ сосудахъ получилась смѣсь одинаковаго достоинства. Сколько ведеръ было отлито изъ каждаго сосуда?

Примѣры на отрицательное рѣшеніе.

385. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 10 лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?

Рѣшеніе. Обозначимъ искомое число лѣтъ черезъ x. Черезъ x лѣтъ отцу будетъ $40+x$, а сыну $10+x$ лѣтъ. По условію:

$$40+x=7(10+x);\text{ откуда } x=-5.$$

Отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына черезъ—5 лѣтъ, т.-е. отецъ *былъ* въ 7 разъ старше сына 5 лѣтъ тому назадъ. Дѣйствительно, 5 лѣтъ тому назадъ отцу было 35, а сыну 5 лѣтъ, а 35 въ 7 разъ больше 5.

386. Два рабочихъ приготовляютъ полотно, при чемъ одинъ изготовляетъ ежедневно 5 арш., а другой 8 арш. Въ настоящее время первый рабочій уже сдѣлалъ n аршинъ, а второй на 12 арш. больше. Черезъ сколько дней число аршинъ, изготовленныхъ первымъ рабочимъ, будетъ равно числу аршинъ, изготовленныхъ вторымъ?

Что означаетъ здѣсь отрицательный отвѣтъ?

387. Въ двухъ кошелькахъ было 100 руб. Вынувъ зиъ одного $^1/_2$, а изъ другого $^1/_3$ денегъ, находившихся въ нихъ, замѣтили, что въ обоихъ кошелькахъ осталось 70 рублей. Сколько денегъ было въ каждомъ кошелькѣ?

Рѣшеніе. Положимъ, что въ первомъ кошелькѣ денегъ было x руб.; тогда въ другомъ ихъ было $100-x$. Когда изъ перваго вынули $^1/_2$ его денегъ, то въ немъ осталось $^1/_2x$; когда

изъ второго вынули $^1/_3$ его денегъ, то въ немъ осталось $^2/_3(100—x)$; по условію задачи:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(100-x)=70$$

$$3x+400-4x=420;\ \text{откуда: } x=-20.$$

Такъ какъ величина, о которой идетъ рѣчь въ вопросѣ задачи, не можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ, то отрицательное рѣшеніе означаетъ здѣсь невозможность задачи.

388. Чтобы поступить въ клубъ, требуется внести единовременно 20 руб. и затѣмъ ежегодно по 10 руб. Два брата сдѣлались членами этого клуба и за все время уплатили 35 руб. Сколько лѣтъ пробыли они членами клуба?

Что означаетъ здѣсь отрицательный отвѣтъ?

Система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

92. Одно уравненіе съ двумя неизвѣстными. Такое уравненіе имѣетъ безчисленное множество корней. Для примѣра возьмемъ уравненіе: $3x—5y=2$. Если вмѣсто одного неизвѣстнаго, напр. вмѣсто y, будемъ подставлять какія-нибудь числа, напр., такія: 0, 1, 2, 3..., то послѣ всякой подстановки получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x; рѣшивъ это уравненіе, найдемъ для x число, соотвѣтствующее взятой величинѣ y. Если, напр., $y=0$, то получимъ: $3x=2$, откуда $x=^2/_3$; если $y=1$, то $3x—5=2$, откуда $x=^7/_3$ и т. д.

Уравненіе, имѣющее безчисленное множество корней, *называется* ***неопредѣленнымъ***.

93. Система уравненій. Нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными: x, y, z..., составляютъ **систему уравненій,** если извѣстно, что каждая изъ буквъ x, y, z... должна означать одно и то же число для всѣхъ уравненій. Если, напр., два уравненія:

$$2x-5=3y-2 \text{ и } 8x-y=2y+21$$

разсматриваются при томъ условіи, что неизвѣстныя x и y должны имѣть одинаковыя численныя значенія для обоихъ уравненій, то такія уравненія образуютъ систему.

Рѣшить системy уравненій значитъ найти всѣ числа, которыя, подставленныя въ данныя уравненія на мѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ уравненія въ тождества. Совокупность этихъ чиселъ называется **рѣшеніемъ** системы.

Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ нѣсколько способовъ. Всѣ они имѣютъ цѣлью привести два уравненія съ двумя неизвѣстными къ одному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ или, какъ говорятъ, **исключительно одно неизвѣстное.** Разсмотримъ два способа.

Замѣчаніе. Прежде чѣмъ примѣнять тотъ или другой изъ указываемыхъ способовъ, надо предварительно **упростить**, т.-е., по освобожденіи ихъ отъ скобокъ и знаменателей уравненія дробей (если таковые имѣются), перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія, а остальные члены—въ правую и сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ.

94. Способъ подстановки. Пусть имѣемъ систему:

$$\begin{cases} 8x-5y=-16 \\ 10x+3y=\ \ 17 \end{cases}$$

и желаемъ исключить x. Для этого разсуждаемъ такъ: изъ перваго уравненія опредѣлимъ x въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y (для чего, конечно, надо членъ $-5y$ перенести направо и затѣмъ раздѣлить обѣ части уравненія на 8):

$$x=\frac{5y-16}{8}.$$

Такъ какъ второе уравненіе должно удовлетворяться тѣми же значеніями неизвѣстныхъ, какъ и первое, то мы

можемъ подставить въ него вмѣсто x найденное для него выраженіе, отчего получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y:

$$10 \cdot \frac{5y-16}{8}+3y=17\cdot$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$\frac{5(5y-16)}{4}+3y=17;\quad 25y-80+12y=68;\quad 37y=148;\quad y=4;$$

тогда: $$x=\frac{5y-16}{8}=\frac{5\cdot 4-16}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Мы могли бы опредѣлить изъ одного уравненія y въ зависимости отъ x и полученное для y выраженіе подставить въ другое уравненіе.

Правило. Чтобы рѣшить 2 уравненія съ 2 неизвѣстными способомъ подставовки, опредѣляютъ изъ какого-либо уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученное выраженіе вставляютъ въ другое уравненіе; отъ этого получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; рѣшивъ его, опредѣляютъ это неизвѣстное; подставивъ найденное число въ формулу, выведенную раньше для перваго неизвѣстнаго, опредѣляютъ и это неизвѣстное.

Этотъ способъ особенно удобенъ тогда, когда коэффиціентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ равенъ 1.

95. Способъ сложенія или вычитанія. Предположимъ сначала, что въ данной системѣ уравненій коэффиціенты при какомъ-нибудь одномъ и томъ же неизвѣстномъ, напр., при y будутъ одинаковы. При этомъ могутъ представиться два случая: или знаки передъ такими коэффиціентами разные, или они одинаковые. Пусть, напр., данныя системы будутъ такія:

1-я система	2-я система
$\begin{cases}7x-\mathbf{2}y=27\\5x+\mathbf{2}y=33\end{cases}$	$\begin{cases}5x+\mathbf{8}y=31\\3x+\mathbf{8}y=25\end{cases}$

Сложимъ почленно уравненія первой системы и вычтемъ почленно уравненія второй системы:

$7x-2y=27$	$5x+8y=31$
$5x+2y=33$	$-3x+8y=-25$
$12x \quad =60$	$2x \quad = 6$

Такимъ образомъ, одно неизвѣстное исключилось. Изъ полученныхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{60}{12}=5 \quad \Big| \quad x=\frac{6}{2}=3$$

Вставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденное для него число, найдемъ y:

$7 \,.\, 5-2y=27$	$5 \,.\, 3+8y=31$
$y=4$	$y=2$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій, въ которыхъ коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ не одинаковы, напр., такую:

$$\begin{cases} 7x+6y=29 \\ -5x+8y=10 \end{cases}$$

Пусть желаемъ исключить y. Для этого преобразуемъ уравненія такъ, чтобы коэффиціенты передъ y оказались одинаковы. Чтобы достигнуть этого, достаточно всѣ члены перваго уравненія умножить на коэффиціентъ при y во второмъ уравненіи, т.-е. на 8, а всѣ члены второго уравненія умножить на коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи, т.-е. на 6:

$$7x+6y=29 \text{ (на 8)} \qquad 56x+\mathbf{48}y=232$$
$$-5x+8y=10 \text{ (на 6)} \qquad -30x+\mathbf{48}y= 60$$

Такимъ образомъ, этотъ случай всегда можно привести къ первому. Послѣ этого остается только сложить или вычесть преобразованныя уравненія. Въ нашемъ примѣрѣ

знаки передъ y въ обоихъ уравненіяхъ одинаковы, а потому для исключенія y надо уравненія почленно вычесть:

$$\begin{array}{rcl} 56x+48y & = & 232 \\ \underline{\mp 30x \pm 48y} & = & \underline{-\,60} \\ 86x & = & 172;\ \text{откуда: } x=2. \end{array}$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти или посредствомъ подстановки въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденнаго для него числа, или тѣмъ же путемъ, какимъ нашли x.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвѣстное по способу сложенія или вычитанія, надо уравнять въ обоихъ уравненіяхъ коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, а потомъ сложить оба уравненія, если знаки передъ этимъ неизвѣстнымъ разные, или изъ одного уравненія вычесть почленно другое, если знаки передъ передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ одинаковые.

Замѣчаніе. Чтобы коэффиціенты передъ y оказались не только равными, но и наименьшими, слѣдуетъ найти наименьшее кратное коэффиціентовъ y, т.-е. 6-и и 8-ми (это будетъ 24), раздѣлить его на каждый изъ этихъ коэффиціентовъ ($24:6=4$; $24:8=3$) и на полученныя частныя умножить соотвѣтственно всѣ члены данныхъ уравненій:

$$\begin{array}{lll} 7x+6y=29 & (\text{на } 4) & 28x+\mathbf{24}y=116 \\ -5x+8y=10 & (\text{на } 3) & -15x+\mathbf{24}y=\ 30 \end{array}$$

Вычтя почленно уравненія, получимъ: $43x=86$, $x=2$.

Упражненія.

389. $\begin{cases} 3x+2y=118 \\ x+5y=191. \end{cases}$ **390.** $\begin{cases} 7x+{}^5/_2y=410{}^1/_2 \\ 93x-14y+448=0. \end{cases}$

391. $\begin{cases} 5{}^3/_4y-11x=4y+117{}^1/_8 \\ 8x+175=2y. \end{cases}$ **392.** $\begin{cases} 7y=2x-3 \\ 19x-60y=621{}^1/_4. \end{cases}$

393. $\begin{cases} (x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112 \\ 2x+10=3y+1. \end{cases}$ **394.** $\begin{matrix} 39x+2y=80 \\ 115x-4y=226. \end{matrix}$

395. $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{5}-\dfrac{y-2x}{3}=1 \\ \dfrac{y+2x}{4}+\dfrac{x+y}{3}=2. \end{cases}$ **396.** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-1}+\dfrac{y-1}{x+1}=\dfrac{x}{y-1}+\dfrac{y}{x+1} \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x-{}^4/_3}=\dfrac{x-1}{y}+\dfrac{y+{}^4/_9}{x-{}^4/_3}. \end{cases}$

397. $\begin{cases} 2(x+y)+4=5(x-y)+19 \\ x-12+13y=3(2x+y)-22. \end{cases}$

398. *A* говоритъ *B*: дай мнѣ 100 рублей и тогда я буду имѣть столько же, сколько будетъ у тебя; *B* отвѣчаетъ: дай ты мнѣ 100 рублей, и тогда у меня будетъ вдвое больше, чѣмъ у тебя. Сколько денегъ у *A* и *B*?

399. Куплено 8 фунтовъ одного товару и 19 фунтовъ другого и за все заплачено 16 р. 45 к.; въ другой же разъ по тѣмъ же цѣнамъ куплено 20 фунтовъ перваго товару и 16 фунтовъ второго и заплачено 23 р. 80 к. Узнать цѣну фунта каждаго товара.

400. Найти такую дробь, что если отнять 1 отъ ея числителя, то получится дробь, равная $^1/_5$, а если отнять 1 отъ ея знаменателя, то величина дроби сдѣлается равной $^1/_4$.

401. Отецъ и сынъ работаютъ вмѣстѣ. За 12 дней работы отца и 9 дней работы сына имъ было уплачено 78 руб.; въ другой разъ за 10 дней работы отца и 11 дней работы сына они получили 72 руб. Сколько получалъ каждый изъ нихъ въ день?

402. Нѣкто отдалъ одну часть своего капитала по 5%, а остальную часть по 3% и получилъ въ годъ дохода 5168 руб.; если бы онъ отдалъ по 3% ту часть капитала, которую отдалъ по 5%, и наоборотъ, то получилъ бы въ годъ дохода на 648 руб. меньше. Какой былъ капиталъ?

403. Бассейнъ въ 210 ведеръ наполняется двумя фонтанами. Изъ опыта нашли, что если открыть одинъ фонтанъ на 4 часа, а другой на 5 часовъ, то они оба вольютъ 90 ведеръ воды; если же первый фонтанъ открыть на 7 часовъ, а другой на $3^1/_2$ часа, то въ бассейнъ вольется 126 ведеръ. Сколько ведеръ вливаетъ каждый фонтанъ въ часъ и во сколько времени бассейнъ наполнится, если оба фонтана дѣйствуютъ одновременно?

404. У меня въ каждой рукѣ по нѣскольку монетъ; если я изъ правой руки въ лѣвую переложу 1 монету, то въ обѣихъ рукахъ будетъ поровну; если же изъ лѣвой руки въ правую переложить 2 монеты, то въ правой рукѣ будетъ въ 2 раза болѣе монетъ, чѣмъ въ лѣвой. Сколько монетъ въ каждой рукѣ?

405. Капиталъ помѣщенъ на проценты. Если къ капиталу прибавить 1000 руб. и увеличить число процентовъ на 1, то

доходъ увеличился бы на 80 руб. Если же еще увеличить капиталъ на 500 руб. и число процентовъ еще увеличить на 1, то доходъ сравнительно съ первоначальнымъ возросъ бы на 160 руб. Какой капиталъ и по скольку процентовъ былъ онъ отданъ?

Система трехъ и болѣе уравненій со многими неизвѣстными.

96. Предварительное замѣчаніе. Одно или два уравненія съ тремя неизвѣстными допускаютъ вообще безчисленное множество корней, потому что въ первомъ случаѣ двумъ неизвѣстнымъ, а въ второмъ — одному неизвѣстному можно придавать произвольныя значенія, число которыхъ, очевидно, безконечно велико.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными вообще имѣетъ лишь одно рѣшеніе для каждаго неизвѣстнаго и рѣшается тѣми же способами, какіе указаны выше для системы двухъ уравненій.

Покажемъ примѣненіе этихъ способовъ на слѣдующемъ примѣрѣ (мы предполагаемъ, что уравненія предварительно упрощены):

$$\begin{cases} 3x-2y+5z=7 \\ 7x+4y-8z=3 \\ 5x-3y-4z=-12. \end{cases}$$

97 Способъ подстановки. Изъ одного уравненія, напр., изъ перваго, опредѣлимъ какое-нибудь неизвѣстное, напр., x, въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ:

$$x=\frac{7+2y-5z}{3}.$$

Подставимъ это выраженіе въ остальныя уравненія:

$$7\cdot\frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z=3,$$

$$5\cdot\frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z=-12.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными. Рѣшивъ ихъ по какому-нибудь изъ способовъ, указанныхъ прежде, найдемъ: $y=3$, $z=2$; подставивъ эти числа въ формулу для x, выведенную раньше, найдемъ и это неизвѣстное:

$$x=\frac{7+2\,.\,3-5\,.\,2}{3}=1.$$

98. Способъ сложенія или вычитанія. Взявъ 1-е уравненіе со 2-мъ, исключимъ изъ нихъ какое-нибудь неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія; отъ этого получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Взявъ потомъ 1-е уравненіе съ 3-мъ (или 2-е съ 3-мъ), тѣмъ же способомъ исключимъ изъ нихъ то же неизвѣстное; отъ этого получимъ еще одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Пусть, напр., желаемъ исключить z:

$$\begin{array}{ll}
1)\ 3x-2y+5z=7\ \text{(на 8)} & 24x-16y+40z=56 \\
2)\ 7x+4y-8z=3\ \text{(на 5)} & \underline{35x+20y-40z=15} \\
 & 59x+\ 4y\qquad\ =71 \\
1)\ 3x-2y+5z=7\ \text{(на 4)} & 12x-\ 8y+20z=28 \\
3)\ 5x-3y-4z=-12\ \text{(на 5)} & \underline{25x-15y-20z=-60} \\
 & 37x-23y\qquad\ =-32
\end{array}$$

Рѣшивъ полученныя два уравненія, найдемъ: $x=1$, $y=3$. Вставивъ эти числа въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ первое, получимъ:

$$3\,.\,1-2\,.\,3+5z=7;\quad 5z=10;\quad z=2.$$

Для исключенія одного неизвѣстнаго мы брали въ этомъ примѣрѣ 1-е уравненіе со 2-мъ, потомъ 1-е съ 3-мъ; но нѣтъ надобности держаться такого порядка. Можно взять 1-е ур. съ 2-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ; или: 1-е съ 3-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ,—однимъ словомъ: надо взять **какое-нибудь изъ трехъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ.**

99. Примѣненіе этихъ способовъ къ бо̀льшему числу уравненій. Тѣми же способами мы можемъ рѣшить систему 4-хъ ур. съ 4 неизвѣстными, 5-и ур. съ 5-ю неизвѣстными, вообще n уравненій съ n неизвѣстными. Положимъ для примѣра, что дано рѣшить систему 5-и ур. съ 5-ю неизвѣстными. Тогда поступаютъ такъ:

Способъ подстановки. Изъ одного уравненія опредѣляютъ какое-нибудь неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ; полученное выраженіе вставляютъ вмѣсто исключаемаго неизвѣстнаго въ остальныя уравненія; отъ этого получаютъ 4 уравненія съ 4 неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно такъ же. Продолжаютъ исключеніе неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, находятъ значеніе этого неизвѣстнаго. Вставивъ это значеніе въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключали въ послѣдній разъ, получаютъ значеніе другого неизвѣстнаго. Вставивъ эти два значенія въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключали въ предпослѣдній разъ, находятъ значеніе третьяго неизвѣстнаго. Продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ получены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

Способъ сложенія или вычитанія. Берутъ два уравненія, напр., первое и второе, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія (конечно, уравнявъ предварительно коэффиціенты передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ). Отъ этого получаютъ одно уравненіе съ 4 неизвѣстными. Потомъ берутъ одно изъ взятыхъ прежде уравненій, напр., второе, вмѣстѣ съ какимъ-нибудь изъ остальныхъ, напр., съ третьимъ, и тѣмъ же способомъ исключаютъ изъ нихъ то же неизвѣстное;

отъ этого получаютъ другое уравненіе съ 4 неизвѣстными. Затѣмъ берутъ одно изъ ранѣе взятыхъ уравненій, напр., третье, вмѣстѣ съ однимъ изъ остальныхъ, напр., съ четвертымъ, и исключаютъ изъ нихъ то же самое неизвѣстное; отъ этого получаютъ третье уравненіе съ 4 неизвѣстными. Перебравъ такимъ образомъ всѣ 5 уравненій, получаютъ 4 ур. съ 4 неизвѣстными. Съ этой системой можно поступать точно такъ же, какъ и съ первой.

Упражненія.

406. $\begin{cases} 3x-y+z=17 \\ 5x+3y-2z=10 \\ 7x+4y-5z=3 \end{cases}$

407. $\begin{cases} 2x+5y-3z+40=0 \\ 5x-6y+2z=45 \\ 5z=195+7x+y \end{cases}$

408. $\begin{cases} 18x-7y-5z=11 \\ 2\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+z=58 \\ 2\frac{1}{2}z+2y+\frac{1}{4}x=80 \end{cases}$

409. $\begin{cases} \frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25}=10 \\ \frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25}=23 \\ \frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25}=26 \end{cases}$

410. $\begin{cases} 3x+5y=161 \\ 7x+2z=209 \\ 2y+z=89 \end{cases}$

Замѣчаніе. Когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе, то система уравненій рѣшается быстрѣе, чѣмъ обыкновенно. Напримѣръ, въ предложенной задачѣ достаточно изъ перваго и второго уравненія исключить x и полученное отъ этого уравненіе (съ y и z) взять вмѣстѣ съ третьимъ. Тогда будемъ имѣть систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными.

411. $\begin{cases} 4x-3z+u=10 \\ 5y+z-4u=1 \\ 3y+u=17 \\ x+2y+3u=25 \end{cases}$

412. $\begin{cases} 4x-3z=10 \\ 2y-5u=5 \\ z+3x=19 \\ 3x+y=13 \\ 2y-3u=11 \end{cases}$

413. $\begin{cases} 2x+y-2z+t=13 \\ 2y-z+2t-x=25 \\ 3z+2t-x+2y=37 \\ 4t-2x+3y-2z=43 \end{cases}$

414. $\begin{cases} x+y=10 \\ x+z=19 \\ y+z=23 \end{cases}$

Замѣчаніе. Иногда систему уравненій можно рѣшить проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, посредствомъ нѣкоторыхъ

искусственныхъ пріемовъ. Такъ, предложенная система просто рѣшается такъ: сложивъ всѣ три уравненія и раздѣливъ результатъ на 2, найдемъ сумму трехъ неизвѣстныхъ. Вычитая изъ этой суммы послѣдовательно первое, второе и третье уравненія, найдемъ значенія для z, y и x.

415. $\begin{cases} x+y+z=29\frac{1}{4} \\ x+y-z=18\frac{1}{4} \\ x-y+z=13\frac{3}{4} \end{cases}$ (Искусственный пріемъ рѣшенія).

416. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13 \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}-\frac{2}{z}=3\frac{1}{2} \end{cases}$

Замѣчаніе. Обозначимъ для краткости дробь $^1/_x$ черезъ a, $^1/_y$ черезъ b и $^1/_z$ черезъ c. Такъ какъ: $^3/_x={}^1/_x\,.\,3$, $^2/_y={}^1/_y\,.\,2$ и т. п., то данныя уравненія можно переписать такъ:

$$\begin{cases} 3a+2b-4c=-13 \\ 6a-3b-\ c=5\frac{1}{2} \\ -5a+7b-2c=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему со *вспомогательными* неизвѣстными a, b и c, найдемъ: $a=2$, $b={}^1/_2$ и $c=5$; значитъ: $^1/_x=2$, $^1/_y={}^1/_2$ и $^1/_z=5$; откуда найдемъ: $x={}^1/_2$, $y=2$ и $z={}^1/_5$.

417. $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{5}{3y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=2\frac{7}{12} \\ \frac{5}{6x}-\frac{1}{y}+\frac{4}{z}=3\frac{7}{9} \end{cases}$ (См. замѣчаніе къ предыдущей задачѣ).

418. $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}=6{,}6 \\ \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}=0 \\ \frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}=-5{,}4 \end{cases}$

Указаніе. За вспомогательныя неизвѣстныя надо принять:

$$\frac{1}{x+y}=a,\ \frac{1}{x+z}=b,\ \frac{1}{y+z}=c.$$

Послѣ этого придется два раза рѣшать системы такого рода, какъ въ задачѣ № 414.

419. У одного человѣка спросили о возрастѣ его самого, его отца и дѣда. Онъ отвѣчалъ: мой возрастъ вмѣстѣ съ годами отца составляетъ 56 лѣтъ; года отца, сложенные съ годами дѣда, составляютъ 100 лѣтъ; мои года вмѣстѣ съ годами дѣда даютъ въ суммѣ 80 лѣтъ. Опредѣлить возрастъ каждаго.

420. Три лица A, B и C имѣютъ вмѣстѣ 1820 руб. B даетъ 200 руб. A и тогда у A оказалось на 160 руб. больше, чѣмъ у B; если же C дастъ B 70 руб., то тогда у B и C будетъ поровну. Сколько денегъ каждый имѣлъ?

421. Три лица A, B и C покупаютъ кофе, сахаръ и чай. A платитъ 14 руб. за 8 фунтовъ кофе, 10 ф. сахару и 3 ф. чаю; A платитъ 16 руб. за 4 ф. кофе, 15 ф. сахару и 5 ф. чаю; C заплатилъ 33 руб. за 12 ф. кофе, 20 ф. сахару и 10 ф. чаю. Опредѣлить цѣну фунта кофе, сахару и чаю.

422. Найти число изъ трехъ цыфръ по слѣдующимъ условіямъ: 1) сумма числа сотенъ и числа единицъ равна удвоенному числу десятковъ, 2) частное отъ дѣленія искомаго числа на сумму его цыфръ равно 48, и 3) если вычтемъ изъ искомаго числа 198, то получимъ число, написанное тѣми же цыфрами, но въ обратномъ порядкѣ.

423. Три каменьщика A, B и C строятъ стѣну. A и B могли бы окончить ее въ 12 дней, B и C—въ 20 дней, A и C—въ 15 дней. Во сколько дней каждый каменщикъ окончилъ бы работу, работая отдѣльно отъ другихъ, и во сколько дней окончатъ трое, работая совмѣстно?

424. Имѣютъ три куска сплава изъ золота, серебра и мѣди; эти куски содержатъ:

1-й кусокъ—2	части зол.,	3	части сер.	и 4	части	мѣди.
2-й кусокъ—3	» »	4	» »	» 5	»	»
3-й кусокъ—4	» »	3	» »	» 5	»	»

Сколько фунтовъ надо взять отъ каждаго куска, чтобы получить сплавъ, содержащій 5 ф. золота, 6 ф. серебра и 8 ф. мѣди?

Объясненіе. Пусть отъ перваго куска надо взять x фунтовъ, отъ второго y, отъ третьяго z. Такъ какъ въ первомъ кускѣ на $2+3+4$ части сплава приходится золота 2 части, серебра 3 части и мѣди 4 части, то, значитъ, въ немъ содержится $^2/_9$ золота, $^3/_9=^1/_3$ серебра и $^4/_9$ мѣди. Подобно этому найдемъ, что во второмъ кускѣ содержится $^3/_{12}=^1/_4$ золота, $^4/_{12}=^1/_3$ серебра и $^5/_{12}$ мѣди; въ третьемъ кускѣ содержится золота $^4/_{12}=^1/_3$, серебра $^3/_{12}=^1/_4$ и мѣди $^5/_{12}$. Слѣдовательно, въ x

фунтахъ, взятыхъ отъ перваго куска, золота будетъ $^2/_9x$, серебра $^1/_3x$ и мѣди $^4/_9x$; въ y фунтахъ второго и въ z фунтахъ третьяго кусковъ количества этихъ металловъ выразятся такъ: $^1/_4y$, $^1/_3y$, $^5/_{12}y$; $^1/_3z$, $^1/_4z$, $^5/_{12}z$. По условіямъ задачи должно быть:

$$\frac{2}{9}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{3}z=5$$

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=6$$

$$\frac{4}{9}x+\frac{5}{12}y+\frac{5}{12}z=8$$

Вмѣсто одного изъ этихъ уравненій можно взять новое уравненіе:

$$x+y+z=19.$$

425. *Имѣютъ три куска сплава изъ золота, серебра и мѣди;* эти куски содержатъ:

1-й кусокъ—на 50 частей зол., 60 частей сер. и 80 частей мѣди.
2-й кусокъ— » 30 » » 50 » » » 70 » »
3-й кусокъ— » 35 » » 65 » » » 90 » »

По скольку фунтовъ надо взять отъ каждаго куска, чтобы образовать четвертый сплавъ, содержащій 79 фунтовъ золота, 118 ф. серебра и 162 ф. мѣди?

426. Три игрока A, B и C условливаются, что проигравшій платитъ остальнымъ двумъ столько, сколько они имѣютъ. Первую партію проигралъ A, вторую B и третью C; послѣ третьей игры оказывается у каждаго игрока одна и та же сумма денегъ a руб. Сколько имѣлъ каждый до игры?

Уравненія неопредѣленныя и несовмѣстныя.

100. Система, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ. Всѣ способы рѣшенія системы уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, приводятъ къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Но такое уравненіе, какъ мы видѣли на примѣрахъ (§ 90), имѣетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (примѣръ 4-й указаннаго параграфа), или ни одного рѣшенія (примѣръ 5-й того же параграфа).

Поэтому и система уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, допускаетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (неопредѣленная система), или не имѣетъ ни одного рѣшенія (невозможная система). Примѣры системъ, допускающихъ единственное рѣшеніе, мы уже имѣли прежде; приведемъ теперь примѣры системъ неопредѣленной и невозможной.

Примѣръ 1. $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 5x+2y-4z=-1 \\ 9x-4y-2z=9. \end{cases}$

Въ этой системѣ третье уравненіе есть **слѣдствіе** двухъ первыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если члены перваго уравненія умножимъ на 2 и потомъ сложимъ его со вторымъ уравненіемъ, то получимъ третье уравненіе; слѣд., если два первыя уравненія удовлетворяются какими-нибудь значеніями неизвѣстныхъ, то тѣми же значеніями удовлетворяется и третье уравненіе. Но первыя два уравненія, содержа три неизвѣстныя, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній; значитъ, система неопредѣленна.

Если станемъ рѣшать эти уравненія, то неопредѣленность обнаружится тѣмъ, что въ концѣ рѣшенія всѣ неизвѣстныя исключатся и получится равенство: $0=0$.

Примѣръ 2. $\begin{cases} 2x-3y=14. \\ 4x-6y=20. \end{cases}$

Въ этой системѣ второе уравненіе **противорѣчитъ** первому: если разность $2x-3y$ должна равняться 14, то разность $4x-6y$, равная $2(2x-3y)$, должна равняться $14 \cdot 2$, т.-е. 28, а не 20, какъ требуетъ второе уравненіе. Значитъ, предложенная система невозможна. Если станемъ рѣшать эти уравненія, то невозможность обнаружится тѣмъ, что получимъ нелѣпое равенство. Такія уравненія наз. **несовмѣстными.**

101. Система, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ. Такая система или допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, или не имѣетъ ни одного рѣшенія. Пусть, напр., намъ дана система 3 уравненій съ 5 неизвѣстными: x, y, z, t и v. Назначимъ для 2 неизвѣстныхъ, напр., для x и y, произвольныя числа и подставимъ ихъ въ данныя уравненія; тогда получимъ систему 3 уравненій съ тремя неизвѣстными z, t и v; рѣшивъ эту систему (если она окажется возможною и опредѣленною), найдемъ значенія этихъ неизвѣстныхъ, соотвѣтствующія числамъ, взятымъ для x и y. Назначивъ какія-нибудь другія числа для x и y, снова найдемъ соотвѣтствующія значенія для остальныхъ неизвѣстныхъ. Такимъ образомъ каждой парѣ произвольно выбранныхъ чиселъ для x и y мы найдемъ соотвѣтствующія значенія остальныхъ трехъ неизвѣстныхъ; значитъ, всѣхъ рѣшеній можетъ быть безчисленное множество.

Можетъ случиться, что уравненія системы окажутся несовмѣстными; тогда система не имѣетъ ни одного рѣшенія.

102. Система, въ которой число уравненій больше числа неизвѣстныхъ. Такая система можетъ имѣть рѣшеніе лишь при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненій. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему 7-и ур. съ 4 неизвѣстными. Взявъ изъ всѣхъ уравненій какія-нибудь 4 и рѣшивъ ихъ (если возможно), мы найдемъ значенія для всѣхъ 4 неизвѣстныхъ. Подставивъ эти значенія въ остальныя 3 уравненія, получимъ 3 равенства, которыя могутъ оказаться невозможными. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія несовмѣстны.

Примѣръ.

$$\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 7x+4y=59 \\ 6x-3y=10 \end{cases}$$

Рѣшивъ два первыя уравненія, найдемъ: $x=5$, $y=6$. Вставивъ эти значенія въ 3-е уравненіе, получимъ невозможное равенство: $12=10$; значитъ, данныя уравненія несовмѣстны.

Упражненія.

427. Указать, почему неопредѣленны слѣдующія двѣ системы уравненій и найти нѣсколько рѣшеній этихъ системъ:

$$\begin{cases} 7x-2y+8z=40 \\ x+10y-2z=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-y+z=0 \\ 3x+2y-z+7t=20 \end{cases}$$

428. Возможны или невозможны слѣдующія двѣ системы уравненій:

$$\begin{cases} 10x-3y=17 \\ 8x+y=17 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+7y=31 \\ 8x-5y=25 \\ x+4y=17 \end{cases}$$

429. Какая зависимость должна быть между числами a и b, чтобы была возможна слѣдующая система:

$$x-1=y-10,\ 2x+y=69,\ ax-y=b.$$

Обнаружить, что слѣдующія системы неопредѣленны или невозможны и объяснить почему:

430. $$\begin{cases} \frac{5y-x}{4}-\frac{5x+y}{6}=26 \\ \frac{x-y}{6}-\frac{x-y}{4}=2 \end{cases}$$

431. $$\begin{cases} \frac{5x-y}{4}-\frac{5x+y}{6}=26 \\ \frac{x-y}{6}-\frac{x-y}{4}=2 \end{cases}$$

432. $$\begin{cases} 5x+3y-11z=13 \\ 4x-5y+4z=18 \\ 9x-2y-7z=25 \end{cases}$$

433. $$\begin{cases} 2x-3y+4z=7 \\ 3x+2y-5z=8 \\ 5x-y-z=15 \end{cases}$$

Степени и корни.

Возвышеніе въ степень одночленовъ.

103. Опредѣленія. 1) **Произведеніе n одинаковыхъ сомножителей $aaa \ldots a$ наз. n-ою степенью числа a.**

Такъ, произведеніе 2 . 2 . 2, равное 8, есть 3-я степень двухъ; произведеніе $^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^1/_2$, равное $^1/_{32}$, есть 5-ая степень $^1/_2$.

Вторая степень наз. иначе **квадратомъ,** а третья — **кубомъ.**

2) **Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится n-ая степень числа a, наз. возвышеніемъ a въ n-ую степень.**

n-ая степень числа a обозначается такъ: a^n. Изъ Опредѣленія видно, что это выраженіе равносильно произведенію $a \cdot a \cdot a \ldots a$ (n сомножителей).

Повторяющійся сомножитель (a) наз. **основаніемъ** степени; число (n) одинаковыхъ сомножителей наз. **показателемъ** степени.

По смыслу опредѣленія видно, что показатель степени есть число цѣлое, положительное, не равное 0. Впрочемъ, условно допускаютъ степень съ показателемъ 0 (§ 65), разумѣя при этомъ, что при всякомъ a выраженіе a^0 равно 1. Впослѣдствіи мы введемъ еще понятіе объ отрицательныхъ и дробныхъ показателяхъ.

104. Правило знаковъ. Мы видѣли (§ 32), что произведеніе оказывается положительнымъ въ томъ случаѣ, когда въ него входитъ четное число отрицательныхъ сомножителей, и отрицательнымъ, когда число такихъ сомножителей нечетное; поэтому:

отъ возвышенія отрицательнаго числа въ степень съ четнымъ показателемъ получается положительное число, а съ нечетнымъ показателемъ—отрицательное.

Такъ: $(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2$; $(-a)^3=(-a)^2(-a)=$ $=(+a^2)(-a)=-a^3$; $(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=+a^4$.

105. Теоремы. 1) **Чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно возвысить въ эту степень каждаго сомножителя отдѣльно.**

Пусть, напр., требуется возвысить произведеніе abc въ квадратъ. Это значитъ, что требуется abc умножить на abc. Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ умножить на второго сомножителя и т. д. Поэтому:

$$(abc)^2=(abc)(abc)=(abc)abc.$$

Въ послѣднемъ произведеніи мы можемъ уничтожить скобки, такъ какъ отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится; значитъ:

$$(abc)^2=(abc)(abc)=(abc)abc=abcabc.$$

Сомножителей произведенія мы можемъ соединять въ какія угодно группы. Соединимъ ихъ такъ: $(aa)(bb)(cc)$, что можно написать $a^2b^2c^2$. Такимъ образомъ:

$$(abc)^2=a^2b^2c^2.$$

Вообще, если n есть какое-нибудь цѣлое положительное число, то $(abc)^n=(abc)(abc)(abc)\ldots=abcabcabc\ldots=(aaa\ldots)$ $(bbb\ldots)$ $(ccc\ldots)=a^nb^nc^n$.

2) **Чтобы возвысить степень въ степень, достаточно перемножить показателей этихъ степеней.**

Пусть, напр., требуется возвысить a^2 въ кубъ, т.-е. требуется найти произведеніе $a^2 \,.\, a^2 \,.\, a^2$. При умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$(a^2)^3=a^2 \,.\, a^2 \,.\, a^2=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}=a^6.$$

Вообще: $(a^m)^n=a^ma^ma^m\ldots=a^{m+m+m+\ldots}=a^{mn}$.

3) Чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя.

Это слѣдуетъ изъ правила умноженія дробей (§ 81). Напримѣръ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

$$\text{Вообще: }\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots=\frac{aaa\ldots}{bbb\ldots}=\frac{a^n}{b^n}.$$

106. Примѣненія. 1) Пусть требуется возвысить одночленъ $3a^2b^3$ въ 4-ю степень. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$(3a^2b^3)^4=3^4(a^2)^4(b^3)^4=81a^8b^{12}.$$

Правило. Чтобы возвысить въ степень одночленъ, достаточно возвысить въ эту степень его коэффиціентъ и показателей буквъ умножить на показателя степени.

2) Дробныя выраженія возвышаются въ степень по теоремѣ 3-й, т.-е. числитель и знаменатель возвышаются отдѣльно: напр.:

$$\left(\frac{-3a^nb^2}{4cd^{r-1}}\right)^3=\frac{(-3a^nb^2)^3}{(4cd^{r-1})^3}=\frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}=-\frac{27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}.$$

Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.

107. Теорема. Квадратъ многочлена равенъ квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ 2-го чл. + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го чл. + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й + квадратъ 4-го члена и т. д.

т.-е. $(a+b+c+d+\ldots)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+$
$+2(a+b+c)d+d^2+\ldots$

Для доказательства возьмемъ сначала двучленъ $a+b$ и возвысимъ его въ квадратъ (§ 62, II):

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Теперь приложимъ къ двучлену $a+b$ третій членъ c и возвысимъ въ квадратъ сумму $a+b+c$ слѣдующимъ образомъ:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,$$

т.-е. мы примемъ сумму двухъ первыхъ членовъ за одночленъ, возвысимъ въ квадратъ по формулѣ квадрата суммы двухъ чиселъ (одно $a+b$, другое c) и въ полученномъ результатѣ раскроемъ первыя скобки, а вторыя оставимъ.

Приложимъ затѣмъ четвертый членъ d, получимъ, подобно предыдущему (взявъ сумму первыхъ трехъ членовъ за одночленъ):

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+$$
$$+d^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Продолжая такимъ образомъ прикладывать по одному члену, убѣдимся, что доказываемая теорема примѣнима къ многочлену съ какимъ угодно числомъ членовъ.

108. Другое выраженіе для квадрата многочлена. Раскрывъ скобки въ правой части послѣдняго равенства и измѣнивъ порядокъ членовъ, получимъ:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+$$
$$+2bd+2cd,$$

что можно выразить такъ: квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній: перваго члена на второй, перваго члена на третій, перваго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ второго члена на третій, второго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ третьяго члена на четвертый и т. д.; короче сказать:

квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній каждаго члена на всѣ послѣдующіе.

109. Замѣчаніе о знакахъ. Многочленъ $a+$ $+b+c...$ представляетъ собою алгебраическую сумму; значитъ, члены его могутъ быть числами отрицательными. Въ этомъ случаѣ полезно замѣтить, что въ окончательномъ результатѣ положительными членами окажутся: 1) квадраты всѣхъ членовъ и 2) тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ членовъ. Напримѣръ:

$$(3x^2-2x+1)^2=9x^4+4x^2+1^2-2(3x^2)(2x)+2(3x^2).1-2(2x).1=$$
$$=9x^4+4x^2+1-12x^3+6x^2-4x=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

Упражненія.

Къ § 104.

434. $(-1)^2; (-1)^3; (-1)^4; (-1)^{13}; (-1)^{18}$. **435.** $(-2)^3; (-2)^4; (-2)^5$.
436. $(-a)^3; (-a)^6; (-a)^8$. **437.** $-(-1)^2; -(-1)^3; [-(-1)^3]^2$.

Къ § 105.

438. I. $(mn)^2; (2xy)^3; \left(-\frac{1}{2}axy\right)^4$. **439.** II. $(a^3)^2; (-a^4)^3; (-a^3)^4; (x^m)^n$.

440. $-\{-[-(-a)^2]^3\}^4$. **441.** III. $\left(\frac{2}{3}\right)^2; \left(\frac{1}{4}\right)^3; \left(\frac{a}{b}\right)^5; \left(-\frac{x}{y}\right)^4$; $(0,3)^4$.

Къ § 106.

442. $(2a^3b^3c)^2$. **443.** $(^2/_3a^4x^2)^3$; **444.** $(0,2ab^3x^4)^3$; **445.** $(-0,1x^my)^4$.
446. $\left(\frac{3ax^3}{5b^2y}\right)^2$. **447.** $\left(-\frac{4a^2mn^3}{3bx^4}\right)^3$. **448.** $\left(-\frac{2(a+b)x^5}{7a^3by^2}\right)^2$.

Къ §§ 107, 108, 109.

449. $(2a-{}^1/_2a+1)^2$. **450.** $({}^1/_2x^2-4x-3)^2$.
451. $(-5a^3x+3a^2x^2-ax^3+3x^4)^2$. **452.** $(0,3x^3-0,1x^2-{}^3/_4x+0,5)^2$.
453. $({}^3/_5a^3b-{}^2/_3a^2b^2+2ab^3-0,3b^4)^2$.

Извлеченіе корня изъ одночлена.

110. Опредѣленія. **1) Корнемъ n-й степени изъ числа а называется такое число, n-ая степень котораго равна a.**

Такъ, корень второй степени изъ 49 есть 7, потому что $7^2=49$; корень третьей степени изъ 125 есть 5, потому что $5^3=125$.

2) Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень изъ даннаго числа, наз. извлеченіемъ корня; это дѣйствіе обратно возвышенію въ степень.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{}$ (**знакъ радикала**); подъ горизонтальной чертой его пишутъ число, корень изъ котораго отыскивается, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; такъ, $\sqrt[3]{27}$ означаетъ, что изъ 27 извлекается корень третьей степени. Показателя корня второй степени принято опускать; напр., $\sqrt{16}$ замѣняетъ обозначеніе $\sqrt[2]{16}$.

Корень второй степени наз. иначе **квадратнымъ,** а третьей степени—**кубичнымъ.** Число, стоящее подъ знакомъ радикала, называютъ **подкореннымъ** числомъ.

Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ, что $(\sqrt{a})^2=a$, $(\sqrt[3]{a})^3=a$ и вообще $(\sqrt[n]{a})^n=a$; точно такъ же: $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt[3]{a^3}=a$,... $\sqrt[n]{a^n}=a$. Такимъ образомъ возвышеніе въ степень и извлеченіе корня суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся (если они одной и той же степени).

111. Правило знаковъ. Изъ условій, принятыхъ въ алгебрѣ относительно умноженія отрицательныхъ чиселъ, слѣдуетъ:

1) **Корень нечетной степени изъ положительнаго числа есть положительное число, а изъ отрицательнаго числа— отрицательное**; напр., $\sqrt[3]{8}=2$ и $\sqrt[3]{-8}=-2$, потому что $2^3=8$ и $(-2)^3=-8$.

2) **Корень четной степени изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія съ одинаковой абсолютной величиной, но съ противоположными знаками.** Такъ, $\sqrt{4}=+2$ и $\sqrt{4}=-2$, потому что $(+2)^2=4$ и $(-2)^2=4$; также $\sqrt[4]{81}=+3$ и -3, потому что $(+3)^4=81$ и $(-3)^4=81$. Двойственное значеніе корня обозначается постановкою двухъ знаковъ передъ абсолютной величиной корня: $\sqrt[4]{81}\pm 3$.

3) **Корень четной степени изъ отрицательнаго числа не можетъ равняться (никакому ни положительному, ни отрицательному) числу,** потому что всякое положительное или отрицательное число, будучи возвышено въ четную степень, даетъ положительное, а не отрицательное число. Напримѣръ, $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа называется **мнимымъ числомъ;** въ противоположность такимъ числамъ числа обыкновенныя, цѣлыя и дробныя, положительныя и отрицательныя, наз. **вещественными** (или **дѣйствительными**) числами.

Всякій корень изъ положительнаго числа, а также и корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа, выражается вещественнымъ числомъ.

Въ нашемъ изложеніи знакомъ $\sqrt{}$ мы будемъ обозначать бо́льшею частью только ариѳметическое значеніе корня, т.-е. положительное значеніе корня изъ положительнаго числа.

112. Теоремы. 1) **Чтобы извлечь корень изъ произведенія, достаточно извлечь его изъ каждаго сомножителя отдѣльно.**

Требуется доказать, что

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c};$$

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c};$$

. . . .

и вообще $$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}.$$

Для доказательства возвысимъ правую часть предполагаемаго равенства въ n-ую степень (чтобы возвысить произведеніе въ степень, достаточно...):

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Но $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b$ и $\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=c$;

Значитъ: $$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=abc.$$

Если же n-ая степень произведенія $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ равна abc, то оно представляетъ собою корень n-ой степени изъ abc.

Примѣръ. $\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{8\ .\ 64}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{64}=2\ .\ 4=8.$

2) **Чтобы извлечь корень изъ степени, показатель которой дѣлится безъ остатка на показателя корня, достаточно раздѣлить показателя степени на показателя корня.**

Такъ $\sqrt[3]{a^6}=a^2$, потому что $(a^2)^3=a^6$; точно такъ же $\sqrt[4]{a^{12}}=a^3$; вообще $\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$, такъ какъ $(a^m)^n=a^{mn}$.

3) **Чтобы извлечь корень изъ дроби, достаточно извлечь его изъ числителя и знаменателя отдѣльно.**

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

Для доказательства возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ую степень (чтобы возвысить дробь въ степень, достаточно...):

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b},$$

что доказываетъ вѣрность предполагавшагося равенства.

Примѣръ. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

113. Примѣненія. 1) Пусть требуется извлечь корень 3-й степени изъ одночлена $8a^9b^6c^{12}$. Примѣняя теорему 1-ую, а затѣмъ 2-ую, получимъ:

$$\sqrt[3]{8a^9b^6c^{12}} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^9}\sqrt[3]{b^6}\sqrt[3]{c^{12}} = 2a^3b^2c^4.$$

Правило. Чтобы извлечь корень изъ одночлена, достаточно извлечь его изъ коэффиціента и раздѣлить показателей буквъ на показателя корня, если это дѣленіе возможно нацѣло.

2) Чтобы извлечь корень изъ дробнаго выраженія, достаточно примѣнить теорему 3-ю, т.-е. извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.:

$$\sqrt[3]{\frac{27a^6x^{3n}}{m^9n^3}} = \frac{\sqrt[3]{27a^6x^{3n}}}{\sqrt[3]{m^9n^3}} = \frac{3a^2x^n}{m^3n}.$$

114. Нѣкоторыя преобразованія радикала. Доказанныя выше теоремы (§ 112) позволяютъ дѣлать слѣдующія преобразованія радикала:

1) **Вынесеніе множителей за знакъ радикала.** Когда показатели всѣхъ или нѣкоторыхъ буквъ въ подкоренномъ выраженіи больше показателя корня, но не дѣлятся на него безъ остатка, тогда можно изъ подкоренного выраженія выдѣлить тѣхъ множителей, изъ которыхъ можно извлечь

корень, и извлечь его на самомъ дѣлѣ, а остальныхъ множителей надо оставить подъ радикаломъ. Напр.:

1) $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a}.$

2) $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[3]{a^3a}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a}=a\sqrt[3]{a}.$

3) $\sqrt[5]{x^{13}}=\sqrt[5]{x^{10}x^3}=\sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{x^3}=x^2\sqrt[5]{x^3}.$

4) $\sqrt{24a^4x^3}=\sqrt{4a^4x^2\,.\,6x}=2a^2x\sqrt{6x}.$

2) **Подведеніе множителей подъ знакъ радикала.** Иногда бываетъ полезно, наоборотъ, подвести подъ знакъ радикала множителя, стоящаго передъ нимъ; для этого надо возвысить его въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала, и написать множителемъ подъ радикаломъ. Напр.:

1) $a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5}.$

2) $2x^2y\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{(2x^2y)^3xy}=\sqrt[3]{2\cdot x^7y^4}.$

3) **Освобожденіе подкоренного выраженія отъ знаменателей.** Покажемъ, какъ можно это выполнить на слѣдующихъ 3-хъ примѣрахъ:

1) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Сдѣлаемъ знаменателя квадратомъ. Для этого достаточно умножить его на 2, на a и на x, т.-е. на $2ax$. Чтобы дробь не измѣнила своей величины, умножимъ и числителя на $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}=\sqrt{\frac{6ax}{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2}=\frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

2) $\sqrt[3]{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}$. Сначала приведемъ всѣ члены многочлена къ общему знаменателю:

$$\sqrt[3]{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{8ax^2+x-20}{4x^2}}.$$

Теперь сдѣлаемъ знаменателя кубомъ, умноживъ его (и числителя) на $2x$:

$$\sqrt[3]{\frac{(8ax^2+x-20)\cdot 2x}{8x^3}}=\frac{\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}}{\sqrt[3]{8x^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}}{2x}=\frac{1}{2x}\sqrt[3]{16ax^3+2x^2-40x}.$$

Упражненія.

Къ § 111.

457. I. $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$.

458. II. $\sqrt{9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; $\sqrt[4]{81}$.

459. III. $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-a^2}$; $\sqrt[4]{-16}$.

Къ § 112.

I. **460.** $\sqrt{4{,}9}$. **461.** $\sqrt{\frac{1}{4}.0{,}01.25}$. **462.** $\sqrt{4ab}$. **463.** $\sqrt{9a^2x^2y}$.

464. $\sqrt[3]{-27a^3bc}$. **465.** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}ax}$. **466.** $\sqrt[5]{abcd}$.

II. **467.** $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^6}$; $\sqrt{(a+b^8)}$. **468.** $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^{12}}$; $\sqrt[3]{(m+n)^9}$

469. $\sqrt[3]{a^{3m}}$; $\sqrt[5]{x^{10}}$; **470.** $\sqrt[5]{x^{25m}}$; $\sqrt[m]{a^{3m}}$.

III. **471.** $\sqrt{\frac{9}{25}}$. **472.** $\sqrt{-\frac{9}{25}}$. **473.** $\sqrt{\frac{a^2}{b^4}}$. **474.** $\sqrt{\frac{a+b}{m-n}}$.

475. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$. **476.** $\sqrt[3]{-0{,}027}$. **477.** $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$. **478.** $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$. **479.** $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

480. $\sqrt{\frac{a^{2n}}{b}}$. **481.** $\sqrt[n]{\frac{a^{3n}}{b^{4n}}}$.

Къ § 113.

482. $\sqrt{25a^6b^2c^{12}}$. **483.** $\sqrt{0{,}36x^4y^2z^{2n}}$. **484.** $\sqrt[3]{{}^1/_8\, a^9(b+c)^9}$.

485. $\sqrt[3]{-0{,}001x^{12}y^3}$. **486.** $\sqrt[3]{125(a+b)^6(c+d)^3}$. **487.** $\sqrt{\frac{9a^2b^4}{25x^6y^2}}$.

488. $\sqrt{\frac{0{,}01a^4b^6c^2}{49m^{16}n^2p}}$. **489.** $\sqrt[3]{-\frac{27a^9b^6}{x^3y^{12}}}$. **490.** $\sqrt[3]{\frac{8(a+b)^6c^3}{x^{12}}}$.

Къ § 114.

491. $\sqrt{4a^3}$. **492.** $\sqrt{8a^{12}b^9}$. **493.** $\sqrt{50a^7b^3x^5}$. **494.** $\sqrt[3]{16a^4}$.

495. $\sqrt[3]{-81x^5y^2}$.

496. $\sqrt{98(a+b)^3x}$. **497.** $\sqrt[3]{(m-n)^5x^4y^7}$.

498. $2\sqrt{2}$. **499.** $3\sqrt{\frac{1}{3}}$. **500.** $a\sqrt{a}$. **501.** $2ab\sqrt{\frac{1}{2}}$. **502.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4a}$.

503. $2a^2b\sqrt[3]{3ab^2}$. **504.** $(a+b)\sqrt{a+b}$. **505.** $2(x-y)^2\sqrt{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

Извлеченіе квадратнаго корня изъ чиселъ.

Извлеченіе корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ цѣломъ числѣ.

115. Предварительныя замѣчанія. 1) Если станемъ возвышать въ квадратъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4..., то получимъ безконечный рядъ возрастающихъ квадратовъ:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Просматривая этотъ рядъ, мы замѣчаемъ, что есть очень много цѣлыхъ чиселъ, которыя въ этомъ ряду не находятся; таковы, напр., числа 3, 8, 14, 21 и многія другія. Очевидно что всякое такое число не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа.

Пусть намъ дано какое-нибудь цѣлое число, напр., 4082, и требуется изъ него извлечь квадратный корень. Условимся, что требованіе это надо понимать такъ: извлечь квадратный корень или изъ самаго числа (если оно окажется квадратомъ цѣлаго числа) или же изъ наибольшаго квадрата цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

2) Если данное цѣлое число менѣе 100, то квадр. корень изъ него находится по таблицѣ умноженія; напр., квадр. корень изъ 60 будетъ 7, потому что $7^2=49$, что меньше 60, а $8^2=64$, что больше 60.

Когда данное число болѣе 100, то квадратный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цыфръ. Сколько бы цыфръ въ немъ ни было, условимся разсматривать, его какъ сумму только десятковъ и единицъ; если, напр., корень будетъ число 358, то мы будемъ его представлять такъ: 35 десятковъ+8 ед.

3) Извлеченіе квадрат. корня изъ цѣлыхъ чиселъ основано на нѣкоторомъ свойствѣ числа десятковъ корня и на нѣкоторомъ свойствѣ числа его единицъ. Эти два свойства мы прежде всего и разсмотримъ.

116. Свойство числа десятковъ корня. Пусть требуется извлечь кв. корень изъ какого-нибудь числа, бóльшаго 100, напр., изъ числа 4082. Обозначимъ число десятковъ корня буквою x (все равно, будетъ ли оно однозначное или многозначное), а число его единиц буквою y. Такъ какъ въ каждомъ десяткѣ содержится 10 ед., то искомый корень выразится $10x+y$. Квадратъ этой суммы долженъ быть наибольшимъ квадратомъ цѣлаго числа, заключающимся въ 4082; въ этомъ числѣ можетъ быть еще нѣкоторый избытокъ надъ наиб. квадратомъ, который назовемъ **остаткомъ отъ извлеченія корня**; поэтому можно написать:

$$4082=(10x+y)^2+\text{ост.}=100x^2+2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти число x, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенства только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ заключается 40. Посмотримъ, сколько ихъ будетъ въ правой части. Въ первомъ членѣ ($100x^2$), очевидно, сотенъ заключается x^2; въ суммѣ остальныхъ трехъ членовъ сотни могутъ быть, но могутъ и не быть (что зависитъ отъ величины чиселъ x и y и остатка отъ извлеченія) [1]; значитъ, мы можемъ только утверждать, что въ правой части уравненія всѣхъ сотенъ будетъ или x^2, или больше x^2. Такъ какъ число сотенъ въ лѣвой части равенства должно быть такое же, какъ и въ правой, то

$$40 \geqslant x^2 \text{ и, слѣд., } x^2 \leqslant 40.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что x^2 есть такой квадратъ цѣлаго числа, который содержится въ 40. Но такихъ квадратовъ есть нѣсколько, а именно: 36, 25, 16 и т. д. Разъяснимъ, что за x^2 надо принять наибольшій изъ этихъ квадратовъ, т.-е. 36. Дѣйствительно, если бы мы взяли за x^2, положимъ, 25, то искомый корень содержалъ бы въ себѣ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами; но число, состоящее изъ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами (хотя бы этихъ единицъ было и 9), меньше 6 десятковъ ($59<60$); между тѣмъ квадратъ 6 десятковъ составляетъ только 36 сотенъ ($60^2=3600$), что меньше 4082, а такъ какъ мы ищемъ квадратный корень изъ наибольшаго квадрата, какой только заключается въ 4082, то не должны брать для корня 5 десятковъ съ единицами, когда и 6-и десятковъ оказывается немного. Если же за x^2 надо взять число 36, то $x=\sqrt{36}=6$.

---

[1]) Если, напр., допустимъ, что $x=6$, $y=8$, то уже одинъ членъ $2xy.\,10$, равный тогда числу 960, будетъ содержать въ себѣ 9 сотенъ; если же примемъ, что $x=1$, $y=2$, то тогда въ суммѣ двухъ членовъ $2xy\,10+y^2$, равной 44, не будетъ содержаться ни одной сотни.

Такимъ образомъ, **число десятковъ искомаго корня должно равняться квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.**

Когда данное число, какъ взятое нами, менѣе 10000, тогда число сотенъ въ немъ менѣе 100; въ этомъ случаѣ десятки корня находятся по таблицѣ умноженія.

117. Свойство числа единицъ корня. Положимъ, что мы нашли десятки корня; тогда мы можемъ вычислить квадратъ десятковъ, т.-е. членъ $100x^2$, для нашего примѣра $x=6$ и $100x^2$ составитъ 3600. Вычтемъ это число изъ 4082:

$$\begin{array}{r} 4082 \\ -36 \\ \hline 482 \end{array}$$

Для этого достаточно изъ 40 сотенъ вычесть 36 сотенъ и къ остатку снести цыфры 82. Получившееся число 482 назовемъ первымъ остаткомъ. Въ немъ должны заключаться: удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы, квадратъ единицъ и остатокъ извлеченія, если онъ есть, т.-е.

$$482 = 2xy10 + y^2 + \text{ост.}$$

Чтобы найти y, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенства только одни десятки. Въ лѣвой части ихъ 48, а въ правой $2xy$ или больше (если въ суммѣ $y^2 +$ ост. окажутся десятки) [1]); поэтому:

$$48 \geqslant 2xy;\ \text{слѣд.},\ 2xy \leqslant 48;\ \text{поэтому}\ y \leqslant \frac{48}{2x}.$$

Такимъ образомъ, **число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня, или меньше этого частнаго.**

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти единицы корня, если его десятки уже найдены. Такъ, въ нашемъ

[1]) Что, напр., окажется при $y>3$.

примѣръ, подставивъ на мѣсто x найденное прежде число 6, найдемъ, что $y \leqslant 4$. Отсюда слѣдуетъ, что y равенъ или 4, или 3, или 2, или 1, или 0. Здѣсь мы не можетъ утверждать заранѣе, что y равняется наибольшему изъ этихъ чиселъ; это иногда бываетъ, а иногда и нѣтъ. Чтобы узнать окончательно, какому изъ этихъ чиселъ равняется y, станемъ испытывать эти цыфры, начиная съ бóльшей, т.-е. съ 4. Для этого вычислимъ сумму $2xy10+y^2$ и сравнимъ полученное число съ 482; если эта сумма дастъ число, бóльшее 482, то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергнемъ испытанію слѣдующую меньшую цыфру.

Вычислить сумму $2xy10+y^2$ всего проще можно такъ: $2xy10+y^2=(2x10+y)y=(2.6.10+4)4=+(120+4)4=124.4=496$, т.-е. **чтобы получить сразу сумму удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ, достаточно къ удвоенному числу десятковъ** (къ 12) **приписать справа цыфру единицъ** (4) **и на эту же цыфру умножить получившееся число.**

Такъ какъ $496 > 482$, то цыфра 4 не годится; надо испытать цыфру 3 подобнымъ же способомъ: $123 \,.\, 3=369$. Такъ какъ $369 < 482$, то цыфра 3 годится. Искомый корень есть 63.

Вычтя 369 изъ 482, получимъ окончательный остатокъ отъ извлеченія корня: $482-369=113$, такъ что можемъ написать:

$$4082=63^2+113.$$

118. Извлеченіе квадратнаго корня, состоящаго изъ одной или изъ двухъ цыфръ. Если данное число меньше 100, то квадратный корень изъ него выражается одною цыфрою и тогда, какъ мы уже говорили раньше, его легко найти по таблицѣ умноженія.

Если же данное число, напр. 4082, болѣе 100, но менѣе 10000, то корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и менѣе 100;

слѣдовательно, онъ выражается двумя цыфрами. Согласно сказанному въ предыдущемъ параграфѣ цыфры эти всего удобнѣе находить такимъ образомъ:

$\sqrt{40'82} = 63$

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 123 & 48'2 \\ 3 & 369 \\ \hline & 113 \end{array}$$

Отдѣливъ въ подкоренномъ числѣ сотни, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ ихъ; найденное число (6) пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ десятковъ. Вычитаютъ квадратъ десятковъ корня (36) изъ сотенъ даннаго числа и къ остатку отъ сотенъ сносятъ двѣ остальныя цыфры. Налѣво отъ остатка проводятъ вертикальную черту, за которую пишутъ удвоенное число десятковъ корня (12). Отдѣливъ въ остаткѣ десятки, дѣлятъ число ихъ на удвоенное число десятковъ корня, т.-е. на число поставленное раньше налѣво отъ вертикальной черты. Цѣлое число, получившееся отъ этого дѣленія, подвергаютъ испытанію. Для этого приписываютъ его справа къ удвоенному числу десятковъ (за вертикальной чертой) и на него же умножаютъ получившееся отъ этого число (124 умн. на 4). Если произведеніе окажется больше остатка, то испытуемая цыфра не годится; тогда подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цифру (123 умн. на 3). Получивъ произведеніе, не бо́льшее остатка, подписываютъ его подъ остаткомъ и вычитаютъ, а испытуемую цыфру пишутъ къ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

119. Извлеченіе квадратнаго корня состоящаго изъ трехъ или болѣе цыфръ. Пусть теперь требуется извлечь квадратный корень изъ числа, бо́льшаго 10000, напр., изъ 35782. Квадратный корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ 3 или болѣе цыфръ. Изъ сколькихъ бы цыфръ онъ ни состоялъ, будемъ его разсматривать, какъ состоящій только

изъ двухъ частей: изъ десятковъ и изъ единицъ и воспользуемся доказанными выше свойствами числа десятковъ корня и числа его единицъ. Число десятковъ корня, какъ мы видѣли (§ 116), равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ, т.-е. въ 357; значитъ, прежде всего надо извлечь квадратный корень изъ этого числа. Такъ какъ число 357 имѣетъ только три цыфры, то этотъ корень найдется по предыдущему:

$\sqrt{3'57}=18$
1
28 | 25'7
8 | 22 4
33

Значитъ, въ искомомъ корнѣ изъ 35782 заключается 18 десятковъ. Чтобы найти его единицы, надо, согласно доказанному прежде (§ 117), предварительно изъ 35782 вычесть квадратъ 18 десятковъ, для чего достаточно изъ 357 вычесть квадратъ 18 и къ остатку снести цыфры 82. Остатокъ отъ вычитанія квадрата 18 изъ 357 у насъ уже есть: это 33. Значитъ, для полученія остатка отъ вычитанія квадрата 18 десятковъ изъ 35782, достаточно къ 33 приписать справа цыфры 82. Дѣйствіе мы можемъ продолжать тамъ же, гдѣ находили $\sqrt{357}$:

$\sqrt{3'57'82}=189$
1
28 | 25'7
8 | 22 4
369 | 338'2
9 | 332 1
61

Отдѣливъ десятки въ остаткѣ 3382, дѣлимъ, согласно доказанному, число ихъ (338) на удвоенное число десятковъ корня (на 36); цыфру (9), полученную отъ дѣленія, подвергаемъ испытанію, для чего ее приписываемъ справа къ удвоенному числу десятковъ корня (къ 36) и на нее умножаемъ получившееся число (369 на 9). Такъ какъ произведеніе оказалось меньше второго остатка, то цыфра 9 годится; ее пишемъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

Вообще, чтобы извлечь квадр. корень изъ какого угодно числа, надо сначала извлечь корень изъ числа его сотенъ; если это число болѣе 100, то придется искать корень изъ

числа сотенъ этихъ сотенъ, т.-е. изъ десятковъ тысячъ даннаго числа; если и это число болѣе 100, придется извлекать корень изъ числа сотенъ десятковъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа и т. д.

Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ даннаго цѣлаго числа, разбиваютъ его, отъ правой руки къ лѣвой, на грани по 2 цыфры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть и одна цыфра. Чтобы найти первую цыфру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цыфру, изъ первой грани вычитаютъ квадратъ первой цыфры корня, къ остатку сносятъ вторую грань и число десятковъ получившагося числа дѣлятъ на удвоенную первую цыфру корня; полученное цѣлое число подвергаютъ испытанію. Слѣдующія цыфры корня находятся по тому же пріему.

Если послѣ снесенія грани число десятковъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. меньше удвоенной найденной части корня, то въ корнѣ ставятъ 0, сносятъ слѣдующую грань и продолжаютъ дѣйствіе дальше.

Вотъ примѣры извлеченія квадр. корня изъ чиселъ, состоящихъ изъ многихъ граней:

$\sqrt{3'50'34'87'59}=18717$; $\sqrt{9'51'10'56}=3084$; $\sqrt{8'72'00'00}=2952$

```
     1 . . . .
   28|25'0 . . .
    8|22 4 . . .
  367|663'4 . .
    7|256 9 . .
 3741|658'7 .
    1|374 1 .
37427|28465'9
    7|26198 9
       22670
```

```
   9 . . .
 608|511'0 .
   8|486 4 .
6164|2465'6
   4|2465 6
        0
```

```
   4 . . .
  49|47'2 . .
   9|44 1 . .
 585|310'0 .
   5|292 5 .
5902|1750'0
    |1180 4
      569 6
```

120. Число цыфръ въ корнѣ. Изъ разсмотрѣнія процесса нахожденія корня слѣдуетъ, что въ **квадратномъ корнѣ столько цыфръ, сколько въ подкоренномъ числѣ заключается граней по 2 цыфры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и 2, и 1 цыфру.**

Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней.

121. Теорема 1. Если цѣлое число N не есть квадратъ другого цѣлаго числа, то оно не можетъ быть и квадратомъ дроби.

Предположимъ противное: пусть нѣкоторая несократимая дробь $^a/_b$, будучи *возвышена* въ квадратъ, даетъ цѣлое число N, т.-е. пусть

$$N = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ откуда: } N = \frac{a^2}{b^2}.$$

Послѣднее равенство возможно только тогда, когда a^2 дѣлится на b^2; но этого не можетъ быть, такъ какъ числа a и b не имѣютъ общихъ множителей дробь $^a/_b$ несократима). Слѣд., число N не можетъ быть квадратомъ дроби.

Теорема 2. Если числитель или знаменатель несократимой ариѳметической дроби $^a/_b$ не представляетъ собою квадратовъ цѣлыхъ чиселъ, то такая дробь не можетъ быть ни квадратомъ цѣлаго, ни квадратомъ дробнаго числа.

Дробь не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа, потому что цѣлое число въ квадратѣ даетъ тоже цѣлое число, а не дробное. Предположимъ, что $^a/_b$ есть квадратъ другой дроби, которая, *по сокращеніи*, пусть будетъ $^p/_q$. Тогда

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{a}{b}, \text{ т.-е. } \frac{p^2}{q^2} = \frac{a}{b}.$$

Но двѣ несократимыя дроби могутъ равняться другъ другу только тогда, когда ихъ числители равны между собою

и знаменатели равны между собою. Поэтому изъ послѣдняго равенства выводимъ:

$$p^2=a \text{ и } q^2=b.$$

Но этого быть не можетъ, такъ какъ по условію число *a* или число *b* не есть квадратъ. Значитъ, нельзя допустить, чтобы данная дробь была квадратомъ другой дроби.

Числа, изъ которыхъ квадратный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. **точными квадратами.** Изъ остальныхъ чиселъ можно извлекать только **приближенные** квадратные корни.

122. Опредѣленія. 1) **Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ съ точностью до 1 изъ даннаго числа наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя различаются одно отъ другого на 1 и между квадратами которыхъ заключается данное число;** меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ **съ недостаткомъ,** а бо́льшее—приближеннымъ корнемъ **съ избыткомъ.**

Напр., приближенный квадратный корень изъ $56^1/_2$ съ точностью до 1 есть каждое изъ чиселъ 7 и 8, потому что эти цѣлыя числа различаются на 1, и между квадратами ихъ заключается $56^1/_2$, такъ какъ $7^2=49$, а $8^2=64$ и, слѣд.:

$$7^2<56^1/_2<8^2.$$

2) **Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ съ точностью до $^1/_n$ изъ даннаго числа наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, которыя различаются одна отъ другой на $^1/_n$ и между квадратами которыхъ заключается данное число;** меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ **съ недостаткомъ,** а бо́льшая—приближеннымъ корнемъ **съ избыткомъ.**

Напр., приближенный квадратный корень изъ 27,5 съ точностью до $^1/_{10}$ есть каждая изъ дробей 5,2 и 5,3, потому что эти дроби, имѣя знаменателя 10, различаются

на $^1/_{10}$, и между квадратами ихъ заключается число 27,5, такъ какъ $5,2^2=27,04$ и $5,3^2=28,09$ и, слѣд.:

$$5,2^2<27,5<5,3^2.$$

123. Правило 1. Чтобы извлечь приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1, достаточно извлечь квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.

Пусть, напр., требуется найти прибл. квадратный корень съ точностью до 1 изъ $150^3/_7$. Для этого извлечемъ квадр. корень (какъ было объяснено раньше) изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключающагося въ 150; это будетъ 12. Значитъ, $12^2<150<13^2$. Это двойное неравенство не нарушится, если къ числу 150 прибавимъ дробь $^3/_7$. Дѣйствительно, если $12^2<150$, то и подавно $12^2<150^3/_7$. Съ другой стороны, такъ какъ 150 и 13^2 числа цѣлыя и $150<13^2$, то значитъ, къ 150-ти надо добавить нѣкоторое цѣлое число (по меньшей мѣрѣ единицу), чтобы получить 13^2; слѣд., если прибавимъ къ 150 дробь $^3/_7$, которая меньше 1, то число $150^3/_7$ останется все-таки меньшимъ, чѣмъ 13^2. Итакъ, $12^2<150^3/_7<13^2$. Отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ 12 и 13 есть приближенный квадратн. корень изъ $150^3/_7$ съ точностью до 1, при чемъ 12 есть приближенный корень съ недостаткомъ, а 13—прибл. корень съ избыткомъ.

Примѣры.

1) $\sqrt{5}=2$ или 3; 2) $\sqrt{5,375}=2$ или 3;

3) $\sqrt{\frac{487}{13}}=\sqrt{37\frac{6}{13}}=6$ или 7; 4) $\sqrt{\frac{5}{6}}=0$ или 1.

124. Правило 2. Чтобы извлечь приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до $^1/n$, достаточно умножить данное число на n^2, изъ полученнаго

произведенія извлечь квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и раздѣлить его на n.

Пусть, напр., требуется найти приближенный квадратный корень изъ 5 съ точностью $^1/_{10}$. Это значитъ, что требуется найти двѣ такія дроби съ знаменателемъ 10, которыя разнятся другъ отъ друга на $^1/_{10}$ и между квадратами которыхъ заключается 5. Пусть искомыя дроби будутъ $^x/_{10}$ и $^{x+1}/_{10}$. Тогда, согласно опредѣленію:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 5 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2; \text{ или } \frac{x^2}{10^2} < 5 < \frac{(x+1)^2}{10^2}.$$

Умноживъ всѣ члены этого двойного неравенства на 10^2, мы не измѣнимъ его смысла, т.-е. меньшее останется меньшимъ; поэтому:

$$x^2 < 5 \,.\, 10^2 < (x+1)^2.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что произведеніе $5 \,.\, 10^2$, т.-е. число 500, заключается между квадратами двухъ цѣлыхъ чиселъ: x и $x+1$, отличающихся другъ отъ друга на 1. Значитъ, x и $x+1$ будутъ приближенные квадратные корни съ точностью до 1 изъ произведенія $5 \,.\, 10^2$. Найдя эти корни (22 и 23) такъ, какъ было показано раньше, получимъ числителей дробей $^x/_{10}$ и $^{x+1}/_{10}$, а раздѣливъ ихъ на 10, найдемъ и самыя дроби (2,2 и 2,3). Дробь $^x/_{10}$ будетъ приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а дробь $^{x+1}/_{10}$—съ избыткомъ.

Примѣры: 1) Найти $\sqrt{72}$ съ точностью до $^1/_7$.

$$72 \,.\, 7^2 = 72 \,.\, 49 = 3528$$

$$\sqrt{3528} = 59 \text{ (до 1)}; \; \sqrt{72} = \frac{59}{7} \left(\text{до } \frac{1}{7}\right).$$

2) Найти $\sqrt{2}$ до сотыхъ долей:

$2 \,.\, 100^2 = 20000$; $\sqrt{20000} = 141$ (до 1); $\sqrt{2} = 1,41$ (до $^1/_{100}$).

3) Найти $\sqrt{^3/_7}$ съ приближеніемъ до $^1/_{1000}$:

$$\frac{3}{7}.1000^2=\frac{3000000}{7}=428571\frac{3}{7};\ \sqrt{428571}=654;\ \sqrt{\frac{3}{7}}=0,654.$$

4) Найти $\sqrt{0,3}$ до $^1/_{100}$:

$$0,3\ .\ 100^2=3000;\ \sqrt{3000}=54;\ \sqrt{0,3}=0,54\ (\text{до}\ ^1/_{100}).$$

5) Найти $\sqrt{0,38472}$ до $^1/_{10}$:

$$0,38472\ .\ 10^2=38,472;\ \sqrt{38}=6;\ \sqrt{0,38472}=0,6.$$

6) Найти $\sqrt{465}$ съ какимъ-нибудь десятичнымъ приближеніемъ:

	$\sqrt{4'65}=21,56$
	4
41	65
1	41
425	2400
5	2125
4306	27500
6	25836
	1664

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1; получаемъ 21. Чтобы найти цыфру десятыхъ (иначе сказать, чтобы найти приближ. корень до $^1/_{10}$), надо было бы умножить 465 на 10^2, т.-е. приписать къ 465 два нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку два нуля. Найдя цыфру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку 2 нуля и искать цыфру сотыхъ и т. д.

Извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей.

125. Точный квадратный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби точные квадраты (§ 121, теор. 2). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно: напр.:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Приближенные квадратные корни изъ дробей находятся обыкновенно такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. примѣры 3, 4, 5). Впрочемъ, можно поступать и иначе. Объяснимъ это на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ:

1) Найти приближенный $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Сдѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменателя; но въ этомъ примѣрѣ можно поступить иначе. Разложимъ знаменателя на простыхъ множителей: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Изъ этого разложенія видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3 то тогда въ произведеніи каждый простой множитель будетъ повторяться четное число разъ, и, слѣд., знаменатель сдѣлается квадратомъ:

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}}=\sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3}=\frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ съ какою-нибудь точностью и результатъ раздѣлить на 12. При этомъ надо имѣть въ виду, что отъ дѣленія на 12 уменьшится и дробь $1/n$, показывающая степень точности. Такъ, если найдемъ $\sqrt{30}$ съ точностью до $1/10$ и результатъ раздѣлимъ на 12, то получимъ приближенный корень изъ дроби $5/24$ съ точностью до $1/120$ (а именно $54/120$ и $55/120$).

2) Найти приближенный $\sqrt{0,378}$.

$$\sqrt{0,378}=\sqrt{\frac{378}{1000}}=\sqrt{\frac{3780}{10000}}=\frac{\sqrt{3780}}{100}=\frac{61}{100} \text{ и } \frac{62}{100}\left(\text{до } \frac{1}{100}\right).$$

Упражненія.

Къ §§ 118 и 119.

506. $\sqrt{4225}$. **507.** $\sqrt{289}$. **508.** $\sqrt{61009}$. **509.** $\sqrt{582169}$;
510. $\sqrt{956484}$. **511.** $\sqrt{57198969}$. **512.** $\sqrt{68492176}$.
513. $\sqrt{285970396644}$. **514.** $\sqrt{48303584206084}$.

Къ §§ 123 и 124.

515. $\sqrt{13}$ до 1; **516.** $\sqrt{13}$ до 0,1; **517.** $\sqrt{13}$ до 0,001.
518. $\sqrt{37{,}26}$ до 1; **519.** $\sqrt{234^5/_6}$ до 1; **520.** $\sqrt{101}$ до $^1/_{100}$.
521. $\sqrt{0{,}8}$ до $^1/_{100}$. **522.** $\sqrt{^8/_9}$ до $^1/_{1000}$. **523.** $\sqrt{3^1/_4}$ до $^1/_{100}$.
524. $\sqrt{0{,}2567803}$ до $^1/_{10}$, затѣмъ до $^1/_{100}$. **525.** $\sqrt{\frac{237}{14}}$ до $^1/_{100}$.
526. $\sqrt{356}$ сначала до 1, затѣмъ до $^1/_{10}$, далѣе до $^1/_{100}$ и т. д.

Къ § 125.

Сдѣлать знаменателя дроби точнымъ квадратомъ и затѣмъ извлечь квадратный корень.

527. $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{7}{11}}$; **528.** $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt{\frac{7}{250}}$.
529. $\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt{5{,}7}$; **530.** $\sqrt{2{,}133}$; **531.** $\sqrt{0{,}00264}$.

Квадратное уравненіе.

126. Общій видъ квадратнаго уравненія. Предположимъ, что въ данномъ уравненіи мы сдѣлали слѣдующія преобразованія: раскрыли скобки, если онѣ есть, уничтожили знаменателей, если въ уравненіи есть дробные члены, перенесли в с ѣ члены въ лѣвую часть уравненія и, наконецъ, сдѣлали приведеніе подобныхъ членовъ. Если послѣ этого въ лѣвой части уравненія окажется членъ, содержащій неизвѣстное въ квадратѣ, и не будетъ членовъ, содержащихъ неизвѣстное въ болѣе высокой степени, то уравненіе наз. **квадратнымъ** (или **второй степени**).

Примѣръ. $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x+1)}{4}$.

Раскрываемъ скобки $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5x+5}{4}$.

Уничтожаемъ знаменателей: $72+2x^2=15x^2+15x$.

Переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть:

$$72+2x^2-15x^2-15x=0.$$

Дѣлаемъ приведеніе; $-13x^2-15x+72=0$.

Общій видъ квадратнаго уравненія слѣдующій:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Здѣсь a, b и c данныя положительныя или отрицательныя числа (b и c могутъ быть нулями), называемыя **коэффиціентами** квадратнаго уравненія; изъ нихъ число c наз. также **свободнымъ членомъ**.

Замѣчаніе. Коэффиціентъ a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, перемѣнивъ въ случаѣ надобности передъ всѣми членами уравненія знаки на противоположные. Если, *напр.*, обѣ части ур. $-13x^2-15x+72=0$ умножимъ на -1, то получимъ ур. $13x^2+15x-72=0$, въ которомъ коэффиціентъ при x^2 есть число положительное.

127. Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія. Квадратному уравненію часто придаютъ болѣе простой видъ, раздѣливъ всѣ его члены на коэффиціентъ при x^2. Такъ, уравненіе $3x^2-15x+2=0$, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на 3, приметъ видъ:

$$x^2-5x+{}^2/_3=0.$$

Вообще, раздѣливъ всѣ члены уравненія $ax^2+bx+c=0$ на a, и обозначивъ ${}^b/_a$ черезъ p, а ${}^c/_a$ черезъ q, получимъ:

$$x^2+px+q=0.$$

128. Рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій. Квадратное уравненіе наз. **неполнымъ**, когда въ немъ нѣтъ члена, содержащаго **x** въ первой степени, или нѣтъ свободнаго члена, или нѣтъ ни того, ни другого. Такія уравненія рѣшаются весьма просто.

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе $3x^2-27=0$.

Изъ уравненій находимъ:

$$3x^2=27 \text{ и } x^2=\frac{27}{3}=9.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ неизвѣстнаго равнялся 9; значитъ, неизвѣстное должно равняться квадратному корню изъ этого числа. Условимся обозначать знакомъ $\sqrt{\ }$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и примемъ во вниманіе, что корень квадратный изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія; тогда можемъ написать:

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$$

Обозначая одно значеніе x черезъ x_1, а другое черезъ x_2, мы можемъ послѣднее равенство выразить такъ:

$$x_1=+3, \quad x_2=-3.$$

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе $x^2+25=0$.

Изъ уравненія находимъ: $x^2=-25$; $x=\pm\sqrt{-25}$;

т.-е. $x_1=+\sqrt{-25}$, $x_2=-\sqrt{-25}$.

Въ этомъ случаѣ оба корня оказались мнимыми.

Примѣръ 3. Рѣшить ур. $2x^2-7x=0$.

Вынесемъ въ лѣвой части уравненія буквы x за скобки, т.-е. представимъ уравненіе такъ: $x(2x-7)=0$. Въ этомъ видѣ лѣвая часть уравненія есть произведеніе двухъ сомножителей: x и $2x-7$. Но произведеніе можетъ равняться нулю только тогда, когда какой-нибудь изъ сомножителей равенъ нулю; слѣд., разсматриваемое уравненіе удовлетворится, если положимъ, что $x=0$, или что $2x-7=0$, т.-е. что $x=7$. Значитъ, уравненіе $2x^2+7=0$ имѣетъ два вещественные корня: $x_1=0$ и $x_2=7$.

Примѣръ 4. Рѣшить ур. $7x^2=0$.

Это уравненіе имѣетъ, очевидно, только одно рѣшеніе: $x=0$.

129. Рѣшеніе уравненія $x^2+px+q=0$. Сначала мы укажемъ рѣшеніе уравненій этого вида на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ, а потомъ рѣшимъ уравненіе въ общемъ видѣ.

Примѣръ 1. Рѣшить ур. $x^2+3x-10=0$.

Перенося свободный членъ въ правую часть, получимъ:

$$x^2+3x=10.$$

Двучленъ x^2+3x можно разсматривать, какъ выраженіе $x+2 \cdot {}^3/_2 \cdot x$, т.-е. какъ сумму квадрата x съ удвоеннымъ произведеніемъ x на число ${}^3/_2$. Отсюда заключаемъ, что если къ этому двучлену мы придадимъ $({}^3/_2)^2$, то получимъ такой трехчленъ, который равенъ квадрату суммы $x+{}^3/_2$. Замѣтивъ это, приложимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $({}^3/_2)^2$:

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=10+\left(\frac{3}{2}\right)^2=10+\frac{9}{4}=\frac{49}{4},$$

или

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{49}{4}.$$

Отсюда видно, что сумма $x+{}^3/_2$ должна быть равна квадр. корню изъ ${}^{49}/_4$. Обозначая по прежнему знакомъ $\sqrt{\ }$ только ариѳметическое значеніе квадр. корня, мы можемъ написать:

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\pm\frac{7}{2}.$$

Перенеся теперь членъ $+{}^3/_2$ въ правую часть уравненія найдемъ:

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2};$$

т.-е. $$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=2;\quad x_2=-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-5.$$

Повѣрка: $2^2+3 \cdot 2-10=0$; $(-5)^2+3(-5)-10=25-15-10=0$.

Примѣръ 2. Рѣшить ур. $x^2-9x+20=0$.

Перенеся членъ $+20$ въ правую часть уравненія; получимъ:

$$x^2-9x=-20.$$

Двучленъ x^2-9x можно разсматривать, какъ выраженіе: $x^2-2\cdot{}^9/_2\cdot x$; поэтому если къ нему придадимъ $({}^9/_2)^2$, то получимъ такой трехчленъ, который равенъ квадрату разности $x-{}^9/_2$. Замѣтивъ это, поступимъ такъ, какъ и въ первомъ примѣрѣ:

$$x^2-9x+\left(\frac{9}{2}\right)^2=-20+\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{81}{4}-20=\frac{1}{4},$$

или
$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Откуда: $x-\frac{9}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$; $x=\frac{9}{2}\pm\frac{1}{2}$;

т.-е. $x_1=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$; $x_2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$.

Повѣрка: $5^2-9\cdot5+20=0$; $4^2-9\cdot4+20=0$.

Примѣнимъ теперь тотъ же пріемъ къ рѣшенію буквеннаго уравненія:

$$x^2+px+q=0$$

$$x^2+px=-q;\quad x+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q;$$

или
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q;$$

откуда:
$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

и слѣд.
$$\boldsymbol{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.}$$

Замѣтивъ, что выраженіе $-{}^p/_2$ представляетъ половину коэффиціента при неизвѣстномъ въ первой степени, взятую съ противоположнымъ знакомъ, мы можемъ выведенную формулу высказать такъ:

Неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равно половинѣ коэффиціента при

неизвѣстномъ въ 1-й степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

Конечно, если p число отрицательное (какъ во 2-мъ примѣрѣ), то выраженіе $-{}^p/_2$ должно быть числомъ положительнымъ; точно такъ же если q число отрицательное (какъ въ 1-мъ примѣрѣ), то $-q$ число положительное.

Замѣчаніе. При рѣшеніи каждаго изъ приведенныхъ выше примѣровъ подъ знакомъ радикала оказалось такое число, изъ котораго корень квадратный извлекается точно; вслѣдствіе этого для x_1 и для x_2 мы получили точныя величины. Но такъ бываетъ не всегда. Возьмемъ такой примѣръ: рѣшить уравненіе $x^2-2x-5=0$.

Примѣняя общую формулу, найдемъ:

$$x=1\pm\sqrt{1^2+5}=1\pm\sqrt{6}.$$

Изъ числа 6 нельзя извлечь точнаго квадр. корня, а только приближенный. Ограничиваясь точностью до ${}^1/_{100}$, получимъ:

$$\sqrt{6}=2{,}44..;\ x_1=1+2{,}44...=3{,}44...;\ x_2=1-2{,}44..=-1{,}44...$$

130. Когда корни бываютъ вещественные и когда мнимые.

Выведенная нами формула распадается на двѣ:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

т.-е.

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Разсматривая эти формулы, замѣчаемъ:

1) Если двучленъ $\frac{p^2}{4}-q$ число положительное, то оба корня вещественны и различны (какъ въ двухъ примѣрахъ приведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ).

2) Если двучленъ $\frac{p^2}{4}-q$ число отрицательное, то оба корня—мнимые (другими словами, уравненіе не имѣетъ корней); напр.:

$x^2-2x+5=0$; $x=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm\sqrt{-4}$; корни мнимые.

3) Если двучленъ $\frac{p^2}{4}-q$ равенъ нулю, то и $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0$; въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ одно рѣшеніе, такъ какъ $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$; напр.:

$$x^2-18x+81=0;\ x=9\pm\sqrt{81-81}=9.$$

131. Рѣшеніе кв. уравненія $ax^2+bx+c=0$. Пусть требуется рѣшить ур. $3x^2-5x-8=0$. Раздѣливъ всѣ члены его на 3, получимъ:

$$x^2-\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}=0.$$

Примѣнимъ къ этому уравненію формулу, выведенную раньше для уравненія $x^2+px+q=0$, и упростимъ ее:

$$x=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{8}{3}}=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{8}{3}}=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{96}{36}};$$

$$x=\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{121}{36}}=\frac{5}{6}\pm\frac{11}{6};$$

$$x_1=\frac{5}{6}+\frac{11}{6}=\frac{16}{6}=2\frac{2}{3};\qquad x_2=\frac{5}{6}-\frac{11}{6}=-\frac{6}{6}=-1.$$

Повторимъ это въ общемъ видѣ:

$$ax^2+bx+c=0;\qquad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

т.-е. **неизвѣстное квадратное уравненіе равно дроби, у которой числитель есть коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія коэффиціента при неизвѣстномъ во второй степени на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени.**

Замѣчанія. 1) Выведенныя формула представляетъ собою **общее рѣшеніе** квадратнаго уравненія, потому что изъ нея можно получить какъ рѣшеніе уравненія x^2+ $+px+q=0$ (полагая $a=1$), такъ и рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій (полагая $b=0$ или $c=0$).

2) ***Если c число отрицательное*** *(при a положительномъ)*, **то оба корня вещественные** (какъ было въ нашемъ численномъ примѣрѣ). Дѣйствительно, если c отрицательное число, то, при a положительномъ, произведеніе $4ac$ число отрицательное и, слѣд., выраженіе $-4ac$ число положительное; съ другой стороны, каковъ бы ни былъ знакъ коэффиціента b, квадратъ b^2 всегда даетъ положительное число; слѣд., въ этомъ случаѣ подкоренное выраженіе b^2-4ac представляетъ собою число положительное и потому корни будутъ вещественны.

3) **Если** c **число положительное** (при a положительномъ), **то корни могутъ быть или оба вещественные** (когда $b^2 \geqslant 4ac$), **или оба мнимые** (когда $b^2 < 4ac$). Въ послѣднемъ случаѣ задача, изъ условій которой выведено уравненіе, должна быть признана невозможною.

4) Вещественные корни могутъ быть неравные и равные (послѣднее, когда $b^2-4ac=0$), оба положительные, оба отрицательные, или одинъ положительный, а другой отрицательный.

132. Число корней квадратнаго уравненія. Разсматривая рѣшеніе квадратныхъ уравненій, мы видимъ, что эти уравненія иногда имѣютъ два корня, иногда одинъ, иногда ни одного. Однако согласились приписывать квадратнымъ уравненіямъ во всѣхъ случаяхъ два корня, разумѣя при этомъ, что корни могутъ быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашенія состоитъ въ томъ, что формулы, выражающія мнимые корни уравненія, обладаютъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ вещественнымъ корнямъ; стоитъ только, совершая дѣйствія надъ мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными для вещественныхъ чиселъ, принимая притомъ, что $(\sqrt{-a})^2=-a$. Точно такъ же, когда уравненіе имѣетъ одинъ корень, мы можемъ, разсматривая этотъ корень, какъ два одинаковыхъ, приписать имъ тѣ же свойства, какія принадлежатъ разнымъ корнямъ уравненія. Простѣйшія изъ этихъ свойствъ выражаются въ слѣдующей теоремѣ.

133. Теорема. Сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени есть 1, равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ; произведеніе корней этого уравненія равно свободному члену.

Док. Пусть x_1 и x_2 будутъ корни уравненія x^2+px+ $+q=0$; тогда, какъ мы видѣли:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};\ \text{поэтому:}$$

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p;$$

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right).$$

Это произведеніе можно найти сокращеннымъ путемъ, основываясь на тождествѣ: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=q.$$

Замѣчаніе. Для уравненія вида $ax^2+bx+c=0$, или, что то же, для уравненія $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, будемъ имѣть:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Слѣдствіе. По даннымъ корнямъ легко составить квадратное уравненіе. Пусть, напр., требуется составить уравненіе, котораго корни были бы 2 и —3. Такъ какъ сумма этихъ корней равна —1, а произведеніе ихъ равно —6, то $=1$, $q=-6$. Значитъ, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2+x-6=0.$$

Подобно этому найдемъ, что —2 и —2 будутъ корнями уравненія $x^2+4x+4=0$, 3 и 0 будутъ корни уравненія $x^2-3x=0$, и т. д.

Упражненія.

Къ § 128.

532. $3x^2-147=0$. **533.** $\frac{1}{3}x^2-3=0$. **534.** $x^2+25=0$.

535. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$. **536.** $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$.

537. $2x^2-7x=0$. **538.** $\frac{3}{7}x^2+x=0$. **539.** $0{,}2x^2-\frac{3}{4}x=0$.

540. $7x^2=0$. **541.** $\frac{3}{5}x^2=0$. **542.** $0{,}7x^2=0$.

Къ §§ 129 и 130.

543. $x^2-5x+6=0$. **544.** $x^2+10x+5=2x^2-6x+53$.
545. $x^2+6x=27$. **546.** $x^2-5^3/_4x=18$. **547.** $x^2-8x=14$.
548. $9^3/_5x-21^{15}/_{16}=x^2$. **549.** $x+\frac{1}{x-3}=5$. **550.** $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$.

Къ § 131.

551. $(2x-3)^2=8x$. **552.** $5x^2-37x+14=0$. **553.** $9x^2+12x+4=0$.

554. $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0$. **555.** $\frac{3(x-1)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{x-1}=5$.

556. $\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$. **557.** $\frac{31}{6x}-\frac{16}{117-2x}=1$.

Къ § 133.

Чему равны сумма и произведеніе корней въ слѣдующихъ уравненіяхъ:

558. $x^2-8x-9=0$. **559.** $x^2+x-1=0$. **560.** $x^2-x+2=0$.

561. $3x^2-5x+6=0$. **562.** $\frac{1}{2}x^2-2x-1=0$.

Составить квадратное уравненіе по слѣдующимъ корнямъ:

563. 2 и 3; 2 и —3; —2 и 3; —2 и —3.

564. $2^1/_2$ и $3^1/_2$; $2^1/_2$ и $-3^1/_2$; $-2^1/_2$ и $-3^1/_2$.

565. 2 и —2. **566.** 3 и 3. **567.** —3 и —3.

568. 10 и 0; —10 и 0.

569. $3+\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{5}$; **570.** $2+\sqrt{-3}$ и $2-\sqrt{-3}$.

571. a и b. **572.** a и $-b$. **573.** $-a$ и $-b$.

---

574. Найти 2 числа, которыхъ произведеніе=750, а частное=$3^1/_3$.

575. Найти 2 числа, изъ которыхъ одно больше другого на 8, а произведеніе ихъ=240.

576. Найти число, квадратъ котораго превосходитъ само число на 306.

577. Я купилъ платки, заплативъ за нихъ 60 руб. Если бы платковъ было куплено 3-мя болѣе за ту же сумму, то каждый платокъ стоилъ бы на 1 руб. дешевле. Сколько куплено платковъ?

578. Назначено для раздачи бѣднымъ 864 руб.; но 6 изъ нихъ оказались не нуждающимися въ помощи; вслѣдствіе этого каждый изъ остальныхъ получилъ на 2 руб. больше, чѣмъ предполагалось прежде. Скольким бѣднымъ розданы были деньги?

579. Общество изъ 20 человѣкъ, мужчинъ и женщинъ, заплатило въ гостинницѣ 48 руб., изъ которыхъ половину уплатили мужчины, а другую половину женщины. Сколько было мужчинъ и сколько женщинъ, если извѣстно, что мужчина платилъ на 1 руб. болѣе, чѣмъ женщина?

580. Два купца продали матерію, одинъ на 3 аршина болѣе другого, и выручили вмѣстѣ за свой товаръ 35 руб. «Если бы я продалъ твой товаръ по моей цѣнѣ», сказалъ тотъ изъ нихъ, у котораго было менѣе аршинъ, «то я выручилъ бы 24 руб.».— «А если бы я продалъ твой товаръ по моей цѣнѣ», отвѣчалъ другой, «то выручилъ бы 12 руб. 50 коп.». Сколько аршинъ продалъ каждый?

581. Два курьера отправляются одновременно въ городъ, отстоящій на 90 верстъ отъ мѣста отправленія. Первый курьеръ въ каждый часъ проѣзжаетъ на 1 версту болѣе, чѣмъ второй, и прибываетъ къ мѣсту назначенія на 1 часъ раньше второго. Опредѣлить, по скольку верстъ каждый курьеръ проѣзжалъ въ часъ.

582. Купецъ купилъ товаръ и затѣмъ его продалъ за 24 руб., потерявъ при этомъ столько процентовъ, сколько рублей, ему стоилъ товаръ. Сколько заплатилъ купецъ за товаръ?

583. За шляпу для себя и шляпку для жены мужъ заплатилъ 24 рубля. Если бы дамская шляпка была дешевле купленной во столько разъ, сколько рублей пришлось заплатить за мужскую шляпу, то и тогда она была бы дороже на 1 рубль мужской шляпы. Узнать цѣну каждой изъ этихъ двухъ вещей.

584. Число, выражающее пробу слитка серебра, равно числу золотниковъ его вѣса. Узнать этотъ вѣсъ, если лигатуры въ слиткѣ было 18 золотниковъ.

585. Одна молодая женщина сказала, что ей 21 годъ, при чемъ, по словамъ ея знакомой, она сбавила съ своего возраста ровно столько процентовъ, сколько ей лѣтъ въ дѣйствительности. Сколько же лѣтъ молодой женщинѣ по мнѣнію ея знакомой?

586. Поѣздъ долженъ былъ проѣхать разстояніе въ 600 верстъ въ теченіе установленнаго расписаніемъ времени, при чемъ онъ долженъ былъ двигаться равномѣрно съ опредѣленною скоростью. Когда онъ прошелъ съ этою скоростью 12 часовъ, произошло нѣкоторое поврежденіе въ паровозѣ, для исправленія котораго поѣздъ простоялъ на мѣстѣ ровно четверть того времени, которое оставалось для окончанія всего пути. Двинувшись далѣе, машинистъ, съ цѣлью нагнать потерянное время, увеличилъ скорость движенія на 5 верстъ въ часъ. Тѣмъ не менѣе по прошествіи всего указаннаго въ расписаніи времени поѣздъ не дошелъ до конечнаго пункта на 30 верстъ. Въ теченіе какого числа часовъ поѣздъ долженъ былъ пройти по расписанію эти 600 верстъ и съ какой скоростью?

587. Для наполненія бассейна водой служатъ 2 крана A и B. Если открыты оба эти крана, то бассейнъ наполняется въ 2 часа 24 минуты; если же открыть только одинъ кранъ, то бассейнъ наполняется краномъ A быстрѣе на 2 часа, чѣмъ краномъ B. Опредѣлить время, въ теченіе котораго бассейнъ наполняется при дѣйствіи каждаго крана въ отдѣльности.

588. A, B и C выѣхали изъ города въ одинъ и тотъ же день, но въ разные часы, и пріѣхали къ знакомому въ деревню одновременно—въ 6 часовъ вечера. A пріѣхалъ на лошадяхъ, B—на велосипедѣ и C—на автомобилѣ. B выѣхалъ изъ города на 1 часъ 40 мин. позже, чѣмъ A; C выѣхалъ въ 4 часа дня, при чемъ оказалось, что онъ каждый часъ проѣзжалъ столько верстъ, сколько верстъ въ часъ дѣлали A и B вмѣстѣ. Когда выѣхали изъ города A и B?

Прогрессіи.

Ариѳметическая прогрессія.

134. Опредѣленіе. Ариѳметической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же постояннымъ для этого ряда числомъ (положительнымъ или отрицательнымъ). Такъ, два ряда:

$\div$ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

$\div$ 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, —2, —4,

составляютъ ариѳметическія прогрессіи, потому что каждое число въ нихъ, начиная со второго, равно предшествующему, сложенному: въ первомъ ряду съ числомъ 3, а во второмъ съ числомъ —2.

Числа, составляющія прогрессіи, наз. ея **членами.** Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить къ предшествующему члену, чтобы получить послѣдующій, наз. **разностью прогрессіи.**

Прогрессія наз. **возрастающею**, когда члены ея увеличиваются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; она наз. **убывающею**, когда члены ея уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; значитъ, разность первой прогрессіи—положительное число, второй—отрицательное.

Для обозначенія того, что данный рядъ представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, ставятъ иногда въ началѣ ряда знакъ $\div$. Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, разность d, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

135. Теорема. Всякій членъ ариѳметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Напр., 12-й членъ такой прогрессіи:

$$\div\ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, \mathit{47}.$$

равенъ $3+4\,.\,11=3+44=47$. Равнымъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи:

$$\div\ 40, 37, 34, 31, 28, 25, 22, 19, 16, \mathit{13}.$$

равенъ $40+(-3)\,.\,9=40-27=13$.

Чтобы доказать это въ общемъ видѣ, возьмемъ прогрессію:

$$\div\ a, b, c, d, \ldots\ldots k, l,$$

у которой разность d. Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

2-й членъ b, имѣющій передъ собою 1 чл. $=a+b$
3-й » c, » » » 2 » $=b+d=a+2d$
4-й » d, » » » 3 » $=c+d=a+3d$

. . . .

Такимъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи равенъ $a+9d$, вообще m-й членъ равенъ $a+d(m-1)$.

Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи (т.-е. къ n-му), получимъ:

$$l=a+d(n-1),$$

т.-е. **послѣдній членъ ариѳметической прогрессіи равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ членовъ, уменьшенное на 1.**

Слѣдствіе. Ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, разность d, и число членовъ n можно изобразить такъ:

$$\div\ a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\dots\ a+d(n-1).$$

136. Лемма. Сумма двухъ членовъ ариѳметической прогрессіи, равноотстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.

Напр., въ прогрессіи: 12, 7, 2,—3,—8,—13,—18 имѣемъ:

$$12+(-18)=-6;\ 7+(-13)=-6;\ 2+(-8)=-6.$$

Чтобы доказать это въ общемъ видѣ, возьмемъ прогрессію:

$$\div\ a,\ b\dots e\dots h\dots к,\ l$$

съ разностью d и положимъ, что e есть 10-й членъ отъ наначала, а h есть 10-й членъ отъ конца прогрессіи. Тогда, по доказанному:

$$e=a+9d. \qquad [1]$$

Для опредѣленія члена h замѣтимъ, что если данную прогрессію напишемъ съ конца: l, $к\dots h\dots e\dots b$, a, то получимъ тоже прогрессію, у которой разность не d, а$-d$. Въ этой прогрессіи членъ h есть 10-й отъ начала, а потому принявъ во вниманіе, что первый членъ прогрессіи есть l, можемъ написать:

$$h=l+(-d)\,.\,9=l-9d. \qquad [2]$$

Сложивъ равенство [1] и [2], получимъ:

$$e+h=a+l.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что вообще n-й членъ отъ начала прогрессіи, сложенный съ n-ымъ членомъ отъ конца ея, составляетъ $a+l$.

137. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число всѣхъ членовъ.

Док. Если сложимъ почленно два равенства:

$$\begin{cases} s=a+b+c+\ldots+i+\kappa+l \\ s=l+\kappa+i+\ldots+c+b+a, \end{cases}$$

то получимъ: $2s=(a+l)+(b+\kappa)+(c+i)+\ldots+(l+a)$. Двучлены, стоящіе внутри скобокъ, представляютъ собою суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи; по доказанному, каждая изъ этихъ суммъ равна $a+l$; подставивъ, найдемъ:

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots[n \text{ разъ}],$$

т.-е. $2s=(a+l)n$; откуда $s=\dfrac{(a+l)n}{2}$.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно.

Рядъ: 1, 2, 3,... $(n-1)$, n представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть 1, разность 1, число членовъ n, послѣдній членъ тоже n; поэтому:

$$s=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Такъ: $1+2+3+4+5=\dfrac{5(5+1)}{2}=\dfrac{30}{2}=15$.

Примѣръ 2. Найти сумму n первыхъ нечетныхъ чиселъ.

Рядъ: 1, 3, 5, 7,... есть ариѳметическая прогрессія, у которой первый членъ есть 1 и разность 2. Если возьмемъ n членовъ, то послѣдній членъ будетъ $1+2(n-1)=2n-1$. Поэтому:

$$s=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2.$$

Такъ: $1+3+5=9=3^2$; $1+3+5+7=16=4^2$]; и т. д.

Примѣръ 3. Найти сумму 10-ти членовъ прогрессіи: $3,\ 2^1/_2,\ 2\ldots$

Въ этой прогрессіи разность равна $-{}^1/_2$; поэтому 10-й членъ будетъ: $3-{}^1/_2\,.\,9=-1^1/_2$, и сумма выразится:

$$s=\frac{[3+(-1^1/_2)]10}{2}=7^1/_2.$$

Дѣйствительно:

$$3+2^1/_2+2+1^1/_2+1+{}^1/_2+0-{}^1/_2-1-1^1/_2=7^1/_2.$$

138. Такъ какъ для 5-ти чиселъ a, l, d, n и s мы имѣемъ два уравненія:

$$1)\ l=a+d(n-1)\ \text{и}\ 2)\ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

то по даннымъ тремъ изъ этихъ чиселъ мы можемъ находить остальныя два. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Задача. Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой сумма равна 12, первый членъ 7, а разность -2.

Для этой задачи уравненія даютъ:

$$l=7-2(n-1)=9-2n\ \text{и}\ 12=\frac{(7+l)n}{2}.$$

Откуда подстановкою находимъ:

$$12=\frac{(7+9-2n)n}{2}=(8-n)n$$

или $$n^2-8n+12=0$$

слѣд., $$n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$$

значитъ: $$n_1=6,\quad n_2=2.$$

Такимъ образомъ, предложенная задача имѣетъ два отвѣта; число членовъ прогрессіи или 6, или 2. И дѣйствительно, двѣ прогрессіи:

$$\div\ 7,\ 5\ \text{и}\ \div\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

имѣютъ одну и ту же сумму.

Упражненія.

615. Найти 30-й членъ ариѳметической прогрессіи, у которой первый членъ есть 3 и разность 4.

616. Найти 15-й членъ прогрессіи, у которой первый членъ 130 и разность—3.

617. Сколько членовъ надо взять въ прогрессіи: 4, 8, 12.., чтобы сумма ихъ равнялась 112?

618. Нѣкто заплатилъ свой долгъ въ 495 руб., уплативъ въ первый разъ 12 руб., затѣмъ 15 руб., далѣе 18 руб. и т. д., увеличивая каждый разъ платежъ на 3 руб. Спрашивается, какъ велика была послѣдняя уплата и сколько было всѣхъ уплатъ?

619. *A* проѣзжаетъ въ каждый день по 40 верстъ; *B*, отправившись вмѣстѣ съ *A* по одному направленію, проѣзжаетъ въ первый день 20 верстъ, во второй 28, въ третій 36 и т. д. Черезъ сколько дней *B* догонитъ *A*?

620. Найти первый членъ прогрессіи съ разностью $1^2/_3$, если сумма первыхъ трехъ членовъ ея равна $7^1/_7$.

621. Найти разность прогрессіи изъ 22 членовъ, если первый членъ ея равенъ 1, а послѣдній 15.

622. Рабочему поручили выкопать колодецъ въ 20 аршинъ глубины и условились платить ему за первый аршинъ 60 коп., за второй 75 коп. и т. д., увеличивая плату за каждый слѣдующій аршинъ на 15 коп. Сколько уплатили рабочему за послѣдній аршинъ и сколько уплатили всего?

Геометрическая прогрессія.

139. Опредѣленіе. Геометрической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, умноженному на одно и то же постоянное для этого ряда число (положительное или отрицательное). Такъ, три слѣдующіе ряда:

$$\div\div 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458$$

$$\div\div 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512$$

$$\div\div 20,\ 10,\ 5,\ {}^5/_2,\ {}^5/_4,\ {}^5/_8,\ {}^5/_6,\ {}^5/_{32}$$

представляютъ геометрическія прогрессіи, потому что каждое число, начиная со второго, получается изъ предше-

ствующаго умноженіемъ: въ первомъ ряду на 3, во второмъ на—2, въ третьемъ на $^1/_2$.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея **членами.** Постоянное для каждой прогрессіи число, на которое надо умножить какой-нибудь членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, наз. **знаменателемъ прогрессіи.**

Геометрическая прогрессія наз. **возрастающею** или **убывающею,** смотря по тому, увеличивается ли или уменьшается абсолютная величина членовъ прогрессіи по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; такъ изъ трехъ указанныхъ выше прогрессій первая и вторая — возрастающія, а третья—убывающая. Въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей меньше 1.

Для обозначенія того, что данный рядъ есть прогрессія геометрическая, иногда ставятъ въ началѣ его знакъ ∺ Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, знаменателя q, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

140. Теорема. Всякій членъ геометрической прогрессіи начиная со второго, равенъ первому ея члену, умноженному на такую степень знаменателя прогрессіи, у которой показатель равенъ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Напр., 6-й членъ прогрессіи (съ знаменателемъ 4):

$$∺ 3, 12, 48, 192, 768, \mathbf{3072}$$

равенъ $3 \cdot 4^5 = 3 \cdot 1024 = 3072$. Равнымъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи (съ знаменателемъ $^1/_2$): 20, 10, 5... равенъ $20 \cdot (^1/_2)^9 = 20 \cdot {}^1/_{512} = {}^5/_{128}$.

Чтобы доказать это въ общемъ видѣ, возьмемъ прогрессію:

$$∺ a\ b,\ c,\ d,\ldots\ h\ldots\ i,\ k,\ l,$$

у которой знаменатель есть q. По опредѣленію прогрессіи:

2-й	членъ	b,	имѣющій	передъ	собою	1 чл.	$=aq$
3-й	»	c,	»	»	»	2 »	$=bq=aq^2$
4-й	»	d,	»	»	»	3 »	$=cq=aq^2$

. . . .

Вообще, если членъ h есть m-й отъ начала, то $h=aq^{m-1}$.

Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи (т.-е. къ n-му), получимъ:

$$l=aq^{n-1}$$

т.-е. **послѣдній членъ геометрической прогрессіи равенъ первому ея члену, умноженному на такую степень знаменателя, у которой показатель равенъ числу всѣхъ членовъ безъ единицы.**

Слѣдствіе. Геометрическую прогрессію, у которой первый членъ есть a и знаменатель q, можно изобразить такъ:

$$\div\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots\ aq^{n-1}.$$

141. Теорема. Сумма членовъ геометрической прогрессіи равна такой дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею, т.-е.

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Док. По опредѣленію геометрической прогрессіи:

$$\begin{cases} b=aq \\ c=bq \\ d=cq \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \kappa=lq \\ l=\kappa q \end{cases}$$

Сложимъ эти равенства почленно; тогда въ лѣвой части получится сумма всѣхъ членовъ безъ перваго, а въ правой—произведеніе знаменателя q на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго:

$$s-a=(s-l\ q.$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно s:

$$s-a=sq-lq;\ lq-a=sq-s=s(q-1);$$

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Примѣръ. Опредѣлить сумму 10-ти членовъ прогрессіи: 1, 2, 2^2,...

Въ этой прогрессіи $a=1$, $q=2$, $l=1\,.\,2^9=2^9$, поэтому:

$$s=\frac{2^9\,.\,2-1}{2-1}=2^{10}-1=1023.$$

И дѣйствительно: $1+2+4+8+16+32+64+128+256+ +512=1023$.

142. Другое выраженіе для суммы. Умноживъ числителя и знаменателя формулы для суммы на —1, мы придадимъ ей другой видъ:

$$s=\frac{a-lq}{1-q}.$$

Эта формула удобна для прогрессіи убывающей, потому что тогда $a>lq$ и $1>q$.

Примѣръ. Опредѣлить сумму 8-ми членовъ прогрессіи: ÷÷ 1, $^1/_3$, $^1/_9$...

Здѣсь $a=1$, $q=\,^1/_3$, $l=1\,.\,(^1/_3)^7=(^1/_3)^7$; поэтому:

$$s=\frac{1-(^1/_3)^8}{1-\,^1/_3}=\frac{3280}{2187}.$$

143. Задача. По даннымъ s, q и n найти a и l.

Подставивъ въ выраженіе для суммы s вмѣсто l произведеніе aq^{n-1}, получимъ:

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1};\ \text{откуда:}\ a=\frac{s(q-1)}{q^n-1}.$$

Слѣд.: $l=aq^{n-1}=\frac{s(q-1)}{q^n-1}\,.\,q^{n-1}$.

Вообще два уравненія: $l=aq^{n-1}$ и $s=\frac{lq-a}{q-1}$, заключающія въ себѣ 5 чиселъ, позволяютъ по даннымъ тремъ изъ нихъ найти остальныя два.

Безконечная геометрическая прогрессія.

144. Если рядъ чиселъ, составляющихъ прогрессію, можетъ быть продолжаемъ безъ конца, то прогрессія наз. **безконечной.** Изъ безконечныхъ прогрессій особенно замѣчательна убывающая геометрическая прогрессія, напр., такая:

$$\div\!\div\ 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_4,\ {}^1/_8,\ {}^1/_{16}\ldots$$

Такія прогрессіи обладаютъ очень важнымъ свойствомъ, а именно: если въ безконечной геометрической убывающей прогрессіи къ первому члену приложимъ второй, къ этой суммѣ прибавимъ третій членъ, затѣмъ четвертый, пятый и т. п., то будемъ получать числа, все болѣе и болѣе приближающіяся къ нѣкоторому, опредѣленному для каждой прогрессіи, числу такъ, что разность между этимъ числомъ (предѣломъ) и получаемыми суммами дѣлается все меньше и меньше и можетъ быть сдѣлана такъ мала, какъ угодно. Если, напр., въ прогрессіи

$$\div\!\div\ 1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_4,\ {}^1/_8,\ {}^1/_{16},\ {}^1/_{32},\ldots$$

начнемъ складывать члены, то будемъ получать такія суммы:

$$1+{}^1/_2=1{}^1/_2;\ 1{}^1/_2+{}^1/_4=1{}^3/_4;\ 1{}^3/_4+{}^1/_8=1{}^7/_8;\ldots$$

Не трудно сообразить, что по мѣрѣ увеличенія числа слагаемыхъ суммы эти приближаются все болѣе и болѣе къ числу 2 такъ, что разность между числомъ 2 и этими суммами можетъ сдѣлаться такъ мала, какъ угодно. Въ самомъ дѣлѣ, когда мы сложимъ только 2 члена, то получимъ $1{}^1/_2$; значитъ, до 2-хъ недостаетъ ${}^1/_2$; когда мы сложимъ 3 члена, т.-е. къ $1{}^1/_2$ приложимъ еще ${}^1/_4$, то до 2-хъ будетъ недоставать ${}^1/_4$; когда сложимъ 4 члена, то до 2-хъ недостанетъ ${}^1/_8$; потомъ будетъ недоставать ${}^1/_{16}$, ${}^1/_{32}$ и т. д.

Число, къ которому такимъ образомъ приближается сумма членовъ геометрической убывающей прогрессіи по

мѣрѣ увеличенія числа ея членовъ, наз. **предѣломъ** этой суммы; для прогрессіи 1, $^1/_2$, $^1/_4$... этотъ предѣлъ есть 2.

145. Разсмотримъ это свойство въ примѣненіи къ какой угодно убывающей геометрической прогрессіи. Обозначимъ ее такъ:

$$\div\div a, b, c \ldots i, k, l \ldots$$

Если эта прогрессія убывающая, то *абсолютная величина* ея знаменателя q должна быть меньше 1. Замѣтивъ это, возьмемъ въ нашей прогрессіи отъ начала нѣсколько членовъ, напр., до члена l включительно, и сложимъ ихъ; ихъ сумма выразится, какъ мы видѣли, формулой:

$$\frac{a-lq}{1-q},$$

которую можно написать въ видѣ разности:

$$\frac{a}{1-q}-\frac{lq}{1-q}.$$

Теперь вообразимъ, что мы беремъ все больше и больше членовъ и находимъ ихъ суммы; тогда въ написанной выше разности уменьшаемое не будетъ измѣняться, а вычитаемое, т. е. дробь $\frac{lq}{1-q}$, будетъ все болѣе и болѣе уменьшаться (такъ какъ вмѣсто члена l будутъ входить слѣдующіе члены, все уменьшающіеся) и можно доказать [1]), что оно можетъ сдѣлаться такъ мало, какъ угодно. Значитъ, взятая нами сумма будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ предѣлу $\frac{a}{1-q}$.

Такимъ образомъ: **предѣлъ суммы членовъ безконечной убывающей геометрической прогрессіи равенъ частному**

---

[1]) Для простоты мы принимаемъ здѣсь это предложеніе безъ доказательства.

отъ дѣленія перваго ея члена на избытокъ единицы надъ знаменателемъ прогрессіи, т.-е.

$$\text{предѣлъ } s=\frac{a}{1-q}.$$

Примѣръ 1. Найти предѣлъ суммы $1+{}^1/_2+{}^1/_4+\ldots$ Здѣсь $a=1$, $q={}^1/_2$; поэтому пред. $s=\frac{1}{1-{}^1/_2}=2$.

Примѣръ 2. Опредѣлить точную величину чистой періодической дроби: 0,232323...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы:

$$s=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\ldots\ldots\ldots$$

Слагаемыя этой суммы суть члены геометрической прогрессіи, у которой первый членъ есть ${}^{23}/_{100}$, а знаменатель $={}^1/_{100}$. Поэтому:

$$\text{предѣлъ } s=\frac{{}^{23}/_{100}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{{}^{23}/_{100}}{{}^{99}/_{100}}=\frac{23}{99}.$$

Отсюда выводится указываемое въ ариѳметикѣ правило обращенія чистой періодической дроби въ обыкновенную.

Примѣръ 3. Опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби 0,3545454...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ суммы:

$$s=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}+\frac{54}{10000000}+\ldots$$

Слагаемыя этой суммы, начиная со второго, суть члены безконечной геометрической убывающей прогрессіи, у которой первый членъ есть $\frac{54}{1000}$ и знаменатель $\frac{1}{100}$.

Поэтому предѣлъ написанной выше суммы равенъ:

$$\frac{3}{10}+\frac{{}^{54}/_{1000}}{1-{}^1/_{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3\,.\,99+54}{990}=$$

$$=\frac{3\,.\,100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}.$$

Отсюда выводится указываемое въ ариѳметикѣ правило обращенія смѣшанной періодической дроби въ обыкновенную.

Упражненія.

623. Найти сумму первыхъ 8 членовъ прогрессіи ∺ 3, $^6/_5$, $^{12}/_{25}$...

624. Найти первый членъ прогрессіи, у которой знаменатель равенъ 5 и 7-й членъ есть 62500.

625. Одинъ покупатель предлагаетъ художнику купить у него его 14 картинъ по средней цѣнѣ за 4600 руб. каждую. Другой покупатель предлагаетъ ему за первую картину 4 руб., за вторую 8 руб., за третью 16 руб. и т. д. Что выгоднѣе для художника и на сколько?

626. Найти 4 числа, зная, что они составляютъ геометрическую прогрессію, что ихъ сумма равна 360 и что послѣднее число въ 9 разъ болѣе второго.

627. Нѣкто поспорилъ, что Нева замерзнетъ 8-го ноября; условія пари были такія: если замерзаніе Невы произойдетъ на нѣсколько дней раньше или позже 8-го ноября, то проигравшій платитъ за первый изъ этихъ дней 5 коп., за второй 15 коп. и т. д., за каждый день втрое болѣе, чѣмъ за предыдущій. Нева замерзла 20 ноября. Сколько денегъ проигравшій долженъ уплатить?

628. Въ геометрической прогрессіи изъ 7 членовъ сумма первыхъ 6 членовъ равна $157^1/_2$, а сумма послѣднихъ 6 членовъ вдвое болѣе. Опредѣлить эту прогрессію.

629. Говорятъ, что индійскій Шахъ Сирамъ предложилъ изобрѣтателю шахматной игры требовать отъ него награду, какую онъ хочетъ. Тотъ попросилъ, чтобы ему дали за первый квадратъ шахматной доски 1 пшеничное зерно, за второй квадратъ 2 зерна, за третій 4 и т. д. въ возрастающей геометрической прогрессіи. Шахъ согласился. Но когда сосчитали все количество пшеницы, какое слѣдуетъ выдать за 64 квадрата шахматной доски, то оказалось, что награда въ этомъ размѣрѣ не можетъ быть выдана по недостатку пшеницы. Сколько же зеренъ пришлось бы выдать изобрѣтателю?

ДОПОЛНЕНІЯ.

Нѣкоторыя уравненія, приводимыя къ квадратнымъ или къ уравненіямъ 2-й степени.

Освобожденіе уравненія отъ радикаловъ.

146. Теорема. Отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень получаемъ новое уравненіе, которое сверхъ корней перваго уравненія можетъ имѣть еще и посторонніе корни.

Док. Мы ограничимся доказательствомъ этой теоремы только для того случая, когда обѣ части уравненія возвышаются въ квадратъ. Пусть имѣемъ уравненіе $A=B$, въ которомъ для краткости лѣвая часть обозначена одною буквою A, а правая буквою B. Возвысимъ обѣ его части въ квадратъ; тогда получимъ новое уравненіе: $A^2=B^2$. Чтобы легче узнать, будетъ ли оно имѣть тѣ же самые корни, какъ и данное уравненіе, представимъ его такъ: $A^2-B^2=0$, или:

$$(A-B)\ (A+B)=0.$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю; значитъ, послѣднее уравненіе удовлетворяется и такими значеніями неизвѣстныхъ, при которыхъ $A-B=0$, и такими, при которыхъ $A+B=0$. Первыя значенія удовлетворяютъ данному уравненію, такъ какъ если $A-B=0$, то это значитъ, что $A=B$. Вторыя значенія окажутся посторонними для даннаго уравненія, такъ какъ если $A+B=0$, то что значитъ, что $A=-B$, тогда какъ данное уравненіе требуетъ, чтобы $A=B$.

Примѣръ. $3x-2=2x$ (одинъ корень $x=2$).

Послѣ возвышенія въ квадратъ получимъ:

$$(3x-2)^2=(2x)^2, \text{ т.-е. } 9x^2-12x+4=4x^2,$$

или

$$5x^2-12x+4=0.$$

Откуда: $x=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\,.\,5\,.\,4}}{2\,.\,5}=\frac{12\pm\sqrt{64}}{10}=\frac{12\pm8}{10};$

$$x_1=2; \qquad x_2=\frac{2}{5}.$$

Подставивъ эти числа въ данное уравненіе вмѣсто x, увидимъ, что число 2 удовлетворяетъ ему, а число $^2/_5$ не удовлетворяетъ; оно составляетъ корень измѣненнаго уравненія:

$$3x-2=-2x.$$

При рѣшеніи задачъ иногда случается получить уравненіе, въ которомъ неизвѣстное стоитъ подъ знакомъ радикала. Чтобы рѣшить такое уравненіе, его надо предварительно освободить отъ радикаловъ. Покажемъ, какъ это сдѣлать въ слѣдующихъ двухъ простѣйшихъ случаяхъ.

147. Случай 1. Если въ уравненіе входитъ только одинъ радикалъ (какой угодно степени), то предварительно **уединяютъ** его, т.-е. переносятъ всѣ члены, не содержащіе радикала, въ одну часть уравненія, а радикалъ оставляютъ въ другой части, и затѣмъ возвышаютъ обѣ части уравненія въ степень, показатель, которой равенъ степени радикала. Найденные корни испытываютъ подстановкою въ данное уравненіе съ цѣлью опредѣлить, какіе изъ нихъ годны и какіе—посторонніе.

Примѣръ 1. $x+\sqrt{x+4}=8.$

Переносимъ членъ x въ правую часть уравненія:

$$\sqrt{x+4}=8-x.$$

Теперь возвышаемъ въ квадратъ обѣ части уравненія;

$$(\sqrt{x+4})^2=(8-x)^2, \text{ т.-е. } x+4=64-16x+x^2.$$

Получилось квадратное уравненіе. Рѣшаемъ его:

$$x^2-17x+60=0$$

$$x=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2-60}=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{17}{2}\pm\frac{7}{2}$$

$$x_1=\frac{17}{2}+\frac{7}{2}=12 \qquad x_2=\frac{17}{2}-\frac{7}{2}=5.$$

Подстановкою убѣждаемся, что первый корень не годенъ для даннаго уравненія, а второй удовлетворяетъ ему (первый корень удовлетворяетъ ур. $-\sqrt{x+4}=8-x$).

Примѣръ 2. $2+\sqrt[4]{x^2-9}=0$.

Уединяемъ радикалъ и затѣмъ возвышаемъ въ четвертую степень:

$$\sqrt[4]{x^2-9}=-2; \qquad x^2-9=16; \qquad x^2=25;$$

$$x_1=+\sqrt{25}=+5; \qquad x_2=-\sqrt{25}=-5.$$

Подставляя эти рѣшенія въ данное уравненіе, видимъ, что ни одно изъ нихъ не удовлетворяетъ ему; значитъ, данное уравненіе не имѣетъ корней (найденные два корня удовлетворяютъ измѣненному уравненію:

$$\sqrt[4]{x^2-9}=2, \text{ т.-е. } 2-\sqrt[4]{x^2-9}=0).$$

148. Случай 2. Если въ уравненіе входятъ только два квадратныхъ радикала, то, уединивъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ радикаловъ, возвышаютъ обѣ части уравненія въ квадратъ; отъ этого получается новое уравненіе съ однимъ радикаломъ, отъ котораго затѣмъ освобождаются такъ, какъ было объяснено раньше.

Примѣръ. $\sqrt{12-x}=1+\sqrt{1+x}$.

Здѣсь уже одинъ радикалъ уединенъ. Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ:

$$12-x=(1+\sqrt{1+x})^2=1+2\sqrt{1+x}+1+x,$$

или $$10-2x=2\sqrt{1+x}, \text{ т.-е. } 5-x=\sqrt{1+x}.$$

Вторичнымъ возвышеніемъ находимъ:

$$25-10x+x^2=1+x, \text{ или } x^2-11x+24=0.$$

Откуда: $x=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2-24}=\frac{11}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{11}{2}\pm\frac{5}{2}.$

$$x_1=8, \quad x_2=3.$$

Подставивъ каждое изъ этихъ чиселъ въ данное уравненіе, находимъ, что только $x_2=3$ удовлетворяетъ ему (первое же число удовлетворяетъ ур. $-\sqrt{12-x}=1-\sqrt{1+x}$).

Упражненія.

630. $3+2\sqrt{x}=5$; **631.** $\sqrt{3x-5}+4=5$. **632.** $5\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$.
633. $7\sqrt{3x}-1=5\sqrt{3x}+5$.

(Въ послѣднихъ двухъ примѣрахъ предварительно сдѣлать приведеніе подобныхъ радикаловъ).

634. $2+\sqrt{3x}=1$. **635.** $x-\sqrt{25-x^2}=7$.

(Какъ передѣлать два послѣднихъ примѣра, чтобы найденные корни не были посторонними?).

636. $x+\sqrt{25-x^2}=7$. **637.** $x+\sqrt{25-x^2}=1$.
638. $x-\sqrt{169-x^2}=17$. **639.** $x+\sqrt{169-x^2}=17$.
640. $\sqrt{32+x}=16-\sqrt{x}$. **641.** $\sqrt{x-7}=\sqrt{x+1}-2$.
642. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}-3=0$. **643.** $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=12$.

Биквадратное уравненіе.

149. Такъ наз. уравненіе четвертой степени, содержащее неизвѣстное только въ четныхъ степеняхъ. Общій видъ его слѣдующій:

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Такое уравненіе приводится къ квадратному уравненію посредствомъ вспомогательнаго неизвѣстнаго. Положимъ, что $x^2=y$; тогда $x^4=y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0.$$

Откуда: $y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Подставивъ каждое изъ этихъ значеній y въ уравненіе $x^2=y$, найдемъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ 4 корня, выражаемые слѣдующими формулами:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

Изъ этихъ 4-хъ корней нѣкоторые (и даже всѣ) могутъ оказаться мнимыми.

Примѣръ. $x^4-13x^2+36=0.$

$$x^2=y,\quad x^4=y^2,\quad y^2-13y+36=0$$

$$y=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{169}{4}-36}=\frac{13}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{13\pm5}{2},$$

$$y_1=\frac{13+5}{2}=9;\quad y_2=\frac{13-5}{2}=4;$$

$$x=\pm\sqrt{y};$$

$$x_1=+\sqrt{9}=3;\quad x_2=-\sqrt{9}=-3;\quad x_3=+\sqrt{4}=2;$$

$$x_4=-\sqrt{4}=-2.$$

Упражненія.

644. $x^4-5x^2+4=0.$ **645.** $x^4-10x^2+9=0.$ **646.** $x^4-6x^2+9=0.$
647. $x^4-8x^2-9=0.$ **648.** $x^4-2x^2-3=0.$ **649.** $2x^4-7x^2-4=0.$

650. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}.$

651. Каково должно быть въ уравненіи $x^4-4x^2+q=0$ число q (т.-е. должно ли оно быть положительное, отрицательное или равное нулю и меньше или больше чего должно оно быть) для того, 1°, чтобы всѣ четыре корня были вещественные; 2°, чтобы два корня были вещественные и два мнимые; 3°, чтобы всѣ корни были мнимые; 4°, чтобы два изъ четырехъ корней равнялись остальнымъ двумъ; и 5°, чтобы два корня равнялись нулю.

Простѣйшіе случаи системъ двухъ уравненій второй степени.

150. Случай 1-й. Если дана система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно уравненіе первой степени, а другое второй степени, то такая система легко рѣшается способомъ подстановки.

Примѣръ. $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 \text{ . . ур. 2-й степ.} \\ 2x-y=1 \text{ . . . . ур. 1-й степ.} \end{cases}$

Изъ уравненія первой степени опредѣляемъ одно неизвѣстное, напр. y, въ зависимости отъ другого: $y=2x-1$. Подставляемъ это выраженіе вмѣсто y въ уравненіе второй степени:

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1.$$

Упрощаемъ это уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ:

$$x^2-4(4x^2-4x+1)+x+6x-3-1=0$$

$$x^2-16x^2+16x-4+x+6x-3-1=0$$

$$-15x^2+23x-8=0;\quad 15x^2-23x+8=0.$$

Рѣшаемъ это квадратное уравненіе по извѣстной формулѣ (§ 131):

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4\,.\,15\,.\,8}}{2\,.\,15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30}$$

$$x_1=\frac{23+7}{30}=1,\quad x_2=\frac{23-7}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$$

Послѣ этого находимъ $y=2x-1$:

$$y_1=2\,.\,1-1=1,\quad y_2=2\,.\,\frac{8}{15}-1=\frac{1}{15}.$$

Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$1)\ \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} x_2=\dfrac{8}{15} \\ y_2=\dfrac{1}{15} \end{cases}$$

151. Случай 2-й. Когда данныя два уравненія съ двумя неизвѣстными оба второй степени, то способъ подстановки можно примѣнить и въ этомъ случаѣ. Но при этомъ можетъ случиться, что окончательное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, полученное послѣ исключенія другого неизвѣстнаго, окажется такимъ, рѣшеніе котораго въ элементарной алгебрѣ не указывается (напр., оно можетъ оказаться уравненіемъ 3-й степени, или уравненіемъ 4-й степени, не биквадратнымъ). Приведемъ примѣръ, который можно рѣшить извѣстными намъ способами.

Примѣръ. $x^2+y^2=17;\quad xy=4.$

Изъ второго уравненія находимъ: $y={}^4/x$; подставивъ это выраженіе вмѣсто y въ первое уравненіе, получимъ:

$$x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=17;\quad x^2+\frac{16}{x^2}=17;\quad x^4+16=17x^2$$

$$x^4-17x^2+16=0.$$

Рѣшаемъ это биквадратное уравненіе (§ 149):

$$x^2=z;\quad z^2-17z+16=0;\quad z=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2-16}$$

$$z=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}-16}=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{17}{2}\pm\frac{15}{2}$$

$$z_1=\frac{17}{2}+\frac{15}{2}=16,\quad z_2=\frac{17}{2}-\frac{15}{2}=1$$

$$x=\pm\sqrt{z}$$

$$x_1=+\sqrt{16}=4;\quad x_2=-\sqrt{16}=-4;\quad x_3=+\sqrt{1}=+1;$$

$$x_4=-\sqrt{1}=-1.$$

Соотвѣтственно этимъ 4 значеніямъ x находимъ 4 значенія для y изъ уравненія $y={}^4/x$. Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ 4 пары рѣшеній:

$$1^0.\begin{cases}x_1=4\\y_1=1\end{cases}\quad 2^0.\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-1\end{cases}\quad 3^0.\begin{cases}x_3=1\\y_3=4\end{cases}\quad 4^0.\begin{cases}x_4=-1\\y_4=-4.\end{cases}$$

Упражненія.

652. $\begin{cases} x^2+y^2=96 \\ x-y=8. \end{cases}$ 653. $\begin{cases} x^2-y^2=146 \\ x-y=6. \end{cases}$ 654. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

655. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y=8. \end{cases}$ 656. $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 4x^2+5y^2=84. \end{cases}$

657. $\begin{cases} x^2-y^2+x-2y+1=0 \\ 2x+y=1. \end{cases}$ 658. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-2x-y-5=0 \\ x+y=3. \end{cases}$

659. $\begin{cases} x^2+4xy-5y^2+2x+92=0 \\ 8x-y=3. \end{cases}$ 660. $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ xy=28. \end{cases}$

661. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \\ x+y=b. \end{cases}$

Дѣйствія надъ радикалами.

152. Предварительныя замѣчанія. Мы уже видѣли, какъ можно изъ всякаго положительнаго числа извлечь квадратный корень точно или приближенно (съ какою угодно степенью точности). Подобно этому существуютъ способы извлекать изъ чиселъ корни другихъ степеней: 3-й, 4-й, 5-й и т. д. Мы не будемъ однако указывать этихъ способовъ, а разсмотримъ только, какъ можно совершать дѣйствія надъ корнями различныхъ степеней, когда эти корни не вычислены, а только обозначены.

Какъ мы видѣли (§ 111), корень четной степени изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія, одно положительное, другое отрицательное, съ одинаковой абсолютной величиной; напр., $\sqrt[4]{16}=\pm 2$. Первое изъ этихъ значеній наз. **ариѳметическимъ.** Мы условимся въ дальнѣйшемъ знакомъ $\sqrt{}$ обозначать только ариѳметическое значеніе.

Замѣтимъ, что ариѳметическое значеніе радикала данной степени изъ даннаго числа можетъ быть только одно. Напр., $\sqrt[4]{16}$ равенъ 2 и только 2, если считать ариѳметическое значеніе этого радикала.

153. Теорема. Если показателя радикала и показателя подкоренного числа умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же цѣлое и положительное число, то величина радикала не измѣнится.

Напр., умножимъ въ выраженіи $\sqrt[3]{a^2}$ показателя корня и показателя подкорненного числа на 4; тогда получимъ новый радикалъ $\sqrt[12]{a^8}$. Докажемъ, что

$$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^8}.$$

Для этого возвысимъ обѣ части доказываемаго равенства въ 12-ю степень. $(\sqrt[12]{a^8})^{12}=a^8$ согласно опредѣленію корня (корнемъ 12-й степени изъ a^8 называется такое число, которое.........). Чтобы возвысить $\sqrt[3]{a^2}$ въ 12-ю степень, можно возвысить $\sqrt[3]{a^2}$ въ 3-ю степень и результатъ возвысить въ 4-ю (§ 105; 2): $(\sqrt[3]{a^2})^{12}=[(\sqrt[3]{a^2})^3]^4$. Но $(\sqrt[3]{a^2})^3=a^2$ согласно опредѣленію корня, и $(a^2)^4=a^8$. Такимъ образомъ, два радикала $\sqrt[12]{a^8}$ и $\sqrt[3]{a^2}$ послѣ возвышенія въ одну и ту же степень даютъ одно и то же число, именно a^8; значитъ, эти радикалы равны.

Подобнымъ же образомъ можно убѣдиться, что вообще:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Читая это равенство справо налѣво, видимъ, что величина радикала не измѣняется о т ъ д ѣ л е н і я показателя его и показателя подкоренного числа на одно и то же число (конечно, если дѣленіе возможно нацѣло).

154. Слѣдствія. 1) Если показатели радикала и подкоренного числа имѣютъ общаго дѣлителя, то на него можно сократить обоихъ показателей. Напр.:

$$\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[3]{a^2};\quad \sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5};\quad \sqrt[4]{(1+x)^2}=\sqrt{1+x}.$$

2) Если подкоренное выраженіе представляетъ собою произведеніе нѣсколькихъ степеней съ различными показателями, и всѣ эти показатели имѣютъ общаго дѣлителя съ показателемъ радикала, то на него можно сократить всѣхъ показателей. Напр., въ выраженіи: $\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}}$ подкоренное число есть произведеніе четырехъ степеней: $2^6 \, . \, a^{12} \, . \, b^6 \, . \, x^{18}$, показатели которыхъ имѣютъ общаго дѣлителя 6 съ показателемъ радикала; въ такомъ случаѣ этотъ радикалъ можемъ представить такъ:

$$\sqrt[12]{2^6a^{12}b^6x^{18}}=\sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6}.$$

Теперь, согласно слѣдствію 1-му, можно сократить показателя радикала и показателя подкоренного числа на 6:

$$\sqrt[12]{2^6a^{12}b^6x^{18}}=\sqrt{2a^2bx^3}.$$

3) Показателей нѣсколькихъ корней можно сдѣлать одинаковыми подобно тому, какъ знаменателей нѣсколькихъ дробей можно сдѣлать равными. Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего наименьшее) показателей всѣхъ радикаловъ и помножить показателя каждаго изъ нихъ и показателя подкоренного числа на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя (т.-е. на частное отъ дѣленія общаго кратнаго на показателя радикала). Пусть даны, напр., радикалы:

$$\sqrt{ax},\quad \sqrt[3]{a^2},\quad \sqrt[12]{x}.$$

Наименьшее кратное показателей есть 12; дополнительные множители: для перваго корня 6, для второго 4 и для

третьяго 1; на основаніи доказанной теоремы можемъ написать:

$$\sqrt[12]{ax}=\sqrt[12]{(ax)^6}=\sqrt[12]{a^6x^6};\quad \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[12]{a^8};\quad \sqrt[12]{x}=\sqrt[12]{x}.$$

155. Подобные радикалы. Подобными радикалами наз. такіе, у которыхъ одинаковы подкоренныя выраженія и показатели радикаловъ (различаться могутъ, слѣд., только множители, стоящіе передъ знаками радикала, и знаки передъ ними). Таковы, напр., выраженія $+3a\sqrt[3]{xy}$ и $-5b\sqrt[3]{xy}$.

Чтобы опредѣлить, подобны ли между собою данные радикалы, слѣдуетъ предварительно упростить ихъ. Для этого слѣдуетъ:

1) вынести изъ-подъ знака радикала тѣхъ множителей, изъ которыхъ возможно извлечь корень (§ 114);

2) понизить, если возможно, степень радикала, сокративъ показателя его и всѣхъ показателей подкоренного числа на общаго дѣлителя;

и 3) освободиться подъ радикалами отъ знаменателей дробей (какъ будетъ указано на приводимомъ ниже примѣрѣ).

Примѣръ. $\sqrt[6]{8a^{12}x^3},\quad \sqrt{\frac{2}{x}},\quad \sqrt[6]{\frac{8}{x^9}}$.

Чтобы узнать, подобны ли эти радикалы, упростимъ ихъ:

$$\sqrt[6]{8a^{12}x^3}=\sqrt[6]{2^3a^{12}x^3}=\sqrt{2a^4x}=a^2\sqrt{2x}.$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}}=\sqrt{\frac{2x}{4}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{4}}\ (\S\ 112,\text{ теор. } 3);\ \sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2x}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2x}$$

$$\sqrt[6]{\frac{8}{x^9}}=\sqrt[6]{\frac{8x^3}{x^{12}}}=\frac{\sqrt[6]{8x^3}}{\sqrt[6]{x^{12}}}=\frac{\sqrt[6]{2^3x^3}}{x^2}=\frac{1}{x^2}\sqrt{2x}.$$

Всѣ три корня оказались подобными.

156. Сложеніе и вычитаніе. Чтобы сложить или вычесть радикалы, соединяютъ ихъ знаками + или — и, если возможно, дѣлаютъ приведеніе подобныхъ радикаловъ.

Примѣры.

1) $a\sqrt[3]{a^4bc}+b\sqrt[3]{ab^7c}+c\sqrt[3]{abc^{10}}=a^2\sqrt[3]{abc}+b^3\sqrt[3]{abc}+c^4\sqrt[3]{abc}=$

$$=(a^2+b^3+c^4)\sqrt[3]{abc}.$$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-$

$$-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}.$$

Умноженіе. Читая равенство:

$$\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots \text{ (§ 112, теор. 1)},$$

справа налѣво, заключаемъ: **чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ одинаковыми показателями, достаточно перемножить подкоренныя числа.**

Если для перемноженія даны радикалы съ различными показателями, то ихъ предварительно приводятъ къ одинаковому показателю. Если передъ радикалами есть коэффиціенты, то ихъ перемножаютъ.

Примѣры. 1) $ab\sqrt{2a.\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot 2b\sqrt{ab}=2a^2b\sqrt{a^2b^2}=$

$$=2a^3b^2.$$

2) $\sqrt[4]{3}.\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{\frac{1}{2}}=\sqrt[12]{3^3.\frac{1}{3^4}.\frac{1}{2^2}}=\sqrt[12]{\frac{1}{12}}.$

Дѣленіе. Читая равенство:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (§ 112, теор. 3)},$$

справа налѣво, заключаемъ: **чтобы раздѣлить радикалы съ одинаковыми показателями, достаточно раздѣлить ихъ подкоренныя числа.**

Радикалы съ различными показателями предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если есть коэффиціенты, то ихъ дѣлятъ.

Примѣры.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b^2}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b^2}{2bx^2}}-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{2(a-b^2)2bx^2}{x^2(a-b^2)}}=-15\sqrt{b}.$

2) $\sqrt[5]{\frac{2a+b}{a+b}-1}:\sqrt[5]{1-\frac{b}{a+b}}=\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}:\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}=1.$

Возвышеніе въ степень. Чтобы возвысить радикалъ въ степень, достаточно возвысить въ эту степень подкоренное число. Дѣйствительно:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a\ldots}=\sqrt[n]{aaa\ldots a}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Примѣры. 1) $\left(\sqrt[4]{2ab^3x^2}\right)^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}.$

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$

3) $\left(a\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3=a^3\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3=a^3\sqrt{\left(a\sqrt[3]{b}\right)^3}=$
$=a^3\sqrt{a^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=a^3\sqrt{a^3b}=a^4\sqrt{ab}.$

Извлеченіе корня. Чтобы извлечь радикалъ изъ радикала, достаточно перемножить ихъ показателей, т.-е.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ nm-ую степень. Отъ возвышенія правой части получимъ, по опредѣленію корня, a; чтобы возвысить

лѣвую часть въ nm-ую степень, возвысимъ ее сначала въ n-ую степень, а потомъ результатъ въ m-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n}\right]^{m}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}=a.$$

Отсюда видно, что предполагаемое равенство вѣрно.

Примѣръ. $\sqrt{x\sqrt[3]{2x^2\sqrt{{}^3/_4x^3}}}$.

Подведемъ множителя $2x^2$ подъ знакъ квадратнаго радикала, для чего предварительно возвысимъ его въ квадратъ (§ 114); тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{(2x^2)^2\,{}^3/_4x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{4x^4\,.\,{}^3/_4x^3}}}=$$

$$=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{3x^7}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[6]{3x^7}}.$$

Теперь подведемъ множителя x подъ знакъ радикала 6-й степени; тогда получимъ:

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^6\,.\,3x^7}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{3x^{13}}}=\sqrt[24]{3x^{13}}.$$

Слѣдствіе. Такъ какъ $\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}$, то извлеченіе корня 4-й степени сводится къ двукратному извлеченію квадратнаго корня, а извлеченіе корня 6-й степени приводится къ извлеченію корня кубичнаго и затѣмъ квадратнаго или наоборотъ.

157. Дѣйствія надъ многочленами, содержащими радикалы (иначе сказать, надъ ирраціональными многочленами) производятся по тѣмъ же правиламъ, какія выведены были для многочленовъ, не содержащихъ радикаловъ (для раціональныхъ многочленовъ).

Примѣры. 1) $(2a\sqrt{x}-{}^1/_3a\sqrt{y})(2a\sqrt{x}+{}^1/_3a\sqrt{y})=$

$$=(2a\sqrt{x})^2-({}^1/_3a\sqrt{y})^2=4a^2x-{}^1/_9a^2y;$$

2) $(5a\sqrt{2x}-\sqrt{1/2})^2=(5a\sqrt{2x})^2-2(5a\sqrt{2x})(\sqrt{1/2})+$
$+(\sqrt{1/2})^2=25a^2\,.\,2x-10a\sqrt{x}+1/2=50a^2x-10a\sqrt{x}+1/2.$

Упражненія.

Къ § 154. Упростить слѣдующіе радикалы:

684. $\sqrt[6]{x^3}$, $\sqrt[8]{a^4}$, $\sqrt[6]{(a+b)^9}$. **685.** $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{10000}$. **686.** $\sqrt[6]{9a^4b^8}$.

687. $\sqrt[8]{16a^8b^{12}}$. **688.** $\sqrt[6]{121a^4b^4}$. **689.** $\sqrt[15]{8a^3b^{12}c^{30}}$.

690. $\sqrt[4]{144a^2b^6}$.

Привести къ одинаковому показателю радикалы:

691. $\sqrt[12]{2a}$ и $\sqrt[3]{a^2}$. **692.** $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{y}$, $\sqrt[5]{z}$. **693.** $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[6]{a}$. **694.** $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{5}$.

695. $\sqrt[8]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$. **696.** $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[6]{12}$. **697.** $\sqrt{1/2}$, $\sqrt[5]{5/3}$, $\sqrt[10]{1/3}$.

698. $\sqrt[6]{y^2z}$, $\sqrt[12]{yz^2}$, $\sqrt[18]{y^2z}$.

Къ § 155. Упростить слѣдующіе радикалы:

699. $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$. **700.** $\sqrt{1^1/_3}$, $\sqrt{5^1/_3}$, $\sqrt{16^1/_3}$.

701. $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{108}$. **702.** $\sqrt[3]{1^3/_5}$, $\sqrt[3]{12{,}8}$, $\sqrt[3]{5^2/_5}$.

703. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$, $\sqrt{ax}$. **704.** $\sqrt[3]{54a^4x^4}$, $\sqrt[3]{16a^7x^4}$, $\sqrt[3]{2ax}$.

705. $\sqrt{\frac{a}{x}}$, $\sqrt{\frac{x}{9a}}$, $\sqrt{ax^3}$, $\sqrt{0{,}25ax}$. **706.** $\sqrt{\frac{bx^2}{a}}$, $\sqrt{\frac{ax^4}{b}}$, $\sqrt{\frac{x^6}{ab}}$.

Къ § 156.

Сложеніе и вычитаніе. **707.** $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}$.

708. $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$.

709. $2\sqrt{5/3}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{3/5}$.

710. $2/3\sqrt{18a^5b^3}+1/5\sqrt{50a^3b^3}-b\sqrt{\frac{9a}{b}}$.

711. $p^2\sqrt[3]{54p^4x^4}-1/2p\sqrt[3]{16p^7x^4}$.

712. $3\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}-(-5\sqrt[3]{a})$.

713. $3\sqrt[3]{2a^5}+4a\sqrt[3]{16a^2}-3a^2\sqrt{\frac{2}{a}}$.

714. $\sqrt{4+4x^2}+\sqrt{9+9x^2}-\sqrt{a^2+a^2x^2}-5\sqrt{1+x^2}$.

Умноженіе. 715. $\sqrt[3]{2}.\ \sqrt[3]{9}.\ \sqrt[3]{6}$. 716. $2\sqrt{5}.\ \sqrt{12}.\ ^1/_4\sqrt{15}$.
717. $6\sqrt[6]{25}\,.\,3\sqrt[3]{125}\,.\,2\sqrt[6]{125}$. 718. $\sqrt[3]{a}\,.\,2\sqrt[3]{a^4}\,.\,3\sqrt[3]{a^4}$.
719. $2\sqrt{\frac{3a}{x^2}}.\ 4\sqrt{\frac{4x^4}{3a^3}}$. 720. $\sqrt[4]{32a^3b^5}.\ \sqrt[4]{8ab^4}.\ \sqrt[4]{b^3}$.
721. $\sqrt{15}\,.\,\sqrt[6]{2}$. 722. $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3}.\sqrt{4}$. 723. $\sqrt{^1/_2}\,.\,\sqrt[3]{^1/_4}.\sqrt[6]{^1/_3}$.
724. $4x^4\sqrt{x}\,.\,2\sqrt[4]{x^3}.\ \sqrt[8]{24x^7}$. 725. $\sqrt{0,2}\,.\,\sqrt[3]{0,5}\,.\,\sqrt[6]{1000}$.
Дѣленіе. 726. $\sqrt{120a^3b} : \sqrt{3ab}$. 727. $18\sqrt[4]{27a^3} : 3\sqrt[4]{30a^2}$.
728. $\sqrt{2a} : \sqrt{\frac{1}{4a^2}}$. 729. $0,1\sqrt[3]{2x^2y^2z^{10}} : 0,01\sqrt[3]{2xy^2z}$.
730. $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$. 731. $\sqrt{8} : \sqrt[3]{2}$. 732. $8a^2\sqrt[6]{81m^4n^5} : 2a\sqrt[3]{3mn^2}$.
Возвышеніе въ степень. 733. $\left(^1/_2\sqrt{2ab}\right)^3$. 734. $\left(2\sqrt[3]{^1/_2a^2x}\right)^2$.
735. $\left(3a^2x\sqrt[3]{a+b}\right)^2$. 736. $\left(\sqrt[4]{(1+x^3)^3}\right)^2$. 737. $\left(\sqrt[5]{x^2}\,.\,\sqrt{x}\right)^{10}$.
738. $\left(3ab^2\sqrt[3]{a^2b}\right)^4$. 739. $\left(\sqrt[4]{\frac{2a}{1+x}}\right)^3$. 740. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3ax}}\right)^2$.
471. $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a}}\right)^3$. 742. $\left(-0,1a^2x\sqrt[3]{ax}\right)^3$. 743. $\left(-^1/_3x^m\sqrt[4]{2ax}\right)^4$.
Извлеченіе корня. 744. $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$. 745. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$. 746. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$.
747. $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$. 748. $\sqrt{a\sqrt{a}}$. 749. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.
750. $\sqrt[3]{2a\sqrt{^1/_4a}}$. 751. $\sqrt{^1/_2ax\sqrt{2a\sqrt{^1/_4a}}}$.
Вычислить слѣдующіе корни (основываясь на равенствѣ $\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$). 752. $\sqrt[4]{25}$. 753. $\sqrt[4]{144}$. 754. $\sqrt[4]{512}$.
755. $\sqrt[6]{117649}$.

Къ § 157. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами:

756. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$. 757. $(\sqrt[3]{a}+2)\ (\sqrt[3]{a}-2)$.
758. $\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}\right)^2$. 759. $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

760. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$.

761. $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$. **762.** $\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}-{}^1/_2\sqrt{c}\right)^2$.

Упростить выраженія: **763.** $[-(-\sqrt[3]{2\sqrt{3}})^2]^3$.

764. $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}} \frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$;

765. $\frac{1}{4(1+\sqrt{x})}+\frac{1}{4(1-\sqrt{x})}+\frac{1}{2(1+x)}$.

Отрицательные и дробные показатели.

158. Значеніе отрицательнаго показателя. Условимся при дѣленіи степеней одного и того же числа производить вычитаніе показателей и въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго; тогда мы получимъ въ частномъ букву съ отрицательнымъ показателемъ; напр.: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Конечно, отрицательный показатель не имѣетъ того значенія, которое придается положительнымъ показателямъ, такъ какъ нельзя повторить число сомножителемъ —2 раза, —3 раза и т. д. Число съ отрицательнымъ показателемъ мы будемъ условно употреблять для обозначенія **частнаго** отъ дѣленія степеней этого числа въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя превосходитъ показателя дѣлимаго на столько единицъ, сколько ихъ находится въ абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя. Такъ, a^{-2} означаетъ частное $a^m : a^{m+2}$, вообще a^{-n} означаетъ частное $a^m : a^{m+n}$.

Понимаемое въ этомъ смыслѣ **число съ отрицательнымъ показателемъ равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель—то же число, но съ положительнымъ показателемъ, равнымъ по абсолютной величинѣ отрицательному показателю.**

Дѣйствительно, согласно нашему условію: $a^{-n}=a^m:a^{m+n}=$ $=\frac{a^m}{a^{m+n}}$. Сократив полученную дробь на a^m., получимъ:

$$a^{-n}=\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}.$$

Напр.: $a^{-1}=\frac{a^m}{a^{m+1}}=\frac{1}{a}, x^{-2}=\frac{x^m}{x^{m+2}}=\frac{1}{x^2}, (a+x)^{-3}=\frac{1}{(a+x)^3}$ и т.п.

159. Отрицательные показатели даютъ возможность представить дробное алгебраическое выраженіе безъ знаменателей; для этого стоитъ только всѣхъ множителей знаменателя перенести множителями въ числителя, взявъ ихъ съ отрицательными показателями. Напримѣръ:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

Само собою разумѣется, что такое преобразованіе дробнаго выраженія есть только измѣненіе одного внѣшняго вида выраженія, а не содержанія его.

160. Дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями. Такое измѣненіе внѣшняго вида имѣетъ, однако, важное значеніе, такъ какъ **всѣ дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями можно выполнять по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей положительныхъ.** Докажемъ это.

Умноженіе. Разсмотримъ отдѣльно три случая: 1) когда одно множимое имѣетъ отрицательнаго показателя, 2) когда одинъ множитель имѣетъ отрицательнаго показателя и 3) когда оба сомножителя съ отрицательными показателями. Предстоитъ доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ **показатели одинаковыхъ буквъ складываются.** Для этого, какъ въ случаѣ умноженія, такъ и при доказательствѣ правилъ другихъ дѣйствій, поступимъ такъ: вмѣсто степени съ отрицательнымъ показателемъ подставимъ дробь,

у которой числитель есть 1, а знаменатель—возвышаемое число съ положительнымъ показателемъ, затѣмъ произведемъ дѣйствіе по правилу, относящемуся до дробей, и полученный результатъ сравнимъ съ тѣмъ, который предстоитъ доказать.

1) Требуется доказать, что: $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$.

Док.: $a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

2) Требуется доказать, что: $a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)}$.

Доказательство то же самое.

3) Требуется доказать, что: $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)}$.

Док.: $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)}$.

Дѣленіе. Разсмотримъ также три случая:

1) Требуется доказать, что: $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$.

Док.: $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

2) Требуется доказать, что: $a^m : a^{-n} = a^{m-(-n)}$.

Док.: $a^m : a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$.

3) Требуется доказать, что: $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m-(-n)}$.

Док.: $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$.

Возвышеніе въ степень. Разсмотримъ также три случая:

1) Требуется доказать, что: $(a^{-m})^n = a^{(-m)n}$.

Док.: $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{(-m)n}$.

2) Требуется доказать, что: $(a^m)^{-n} = a^{m(-n)}$.

Док.: $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)}$.

3) Требуется доказать, что: $(a^{-m})^{-n}=a^{(-m)(-n)}$.

Док.: $(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}=a^{(-m)(-n)}$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что:

$\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{\frac{-m}{n}}$, если m дѣлится на n нацѣло (напр., $\sqrt[4]{a^{-12}}=a^{-3}$).

Док.: $\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=a^{-\frac{m}{n}}=a^{\frac{-m}{n}}$.

Въ нашемъ курсѣ не встрѣтится надобности разсматривать радикалы съ отрицательными показателями, а потому мы ограничимся только доказаннымъ выше случаемъ.

Примѣры. 1) $(3a^{-2n}b^2c^{1-r})(0,8a^{n+1}b^{-3}c^{r+2})=2,4a^{1-n}b^{-1}c^3$.

2) $(x^{2n-r}y^{-m}z^2):(5x^{-r}y^3z^{-n})=\frac{1}{5}x^{2n}y^{-m-3}z^{n+2}$.

3) $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})=a^{-4}-b^{-6}$.

4) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3x+6}r^2}=3p^{-3}q^{-x+2}\sqrt[3]{r^2}$.

161. Значеніе дробнаго показателя. Мы видѣли (§ 112, теор. 2-я), что при извлеченіи корня изъ степени показатель подкореннаго числа дѣлится на показателя корня, если такое дѣленіе выполняется нацѣло. Теперь мы условимся распространить это правило и на тотъ случай, когда показатель подкореннаго числа не дѣлится нацѣло на показателя корня. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ извлеченія корня мы должны получить степень съ дробнымъ показателемъ; напр.:

$\sqrt[3]{a^5}$ выразится $a^{\frac{5}{3}}$

$\sqrt[n]{a^m}$ » $a^{\frac{m}{n}}$ и т. п.

Само собою разумѣется, что дробные показатели не имѣютъ того значенія, какое имѣютъ цѣлые показатели; напр., нельзя понимать степень $a^{\frac{2}{3}}$ въ томъ смыслѣ, что a берется сомножителемъ $\frac{2}{3}$ раза, такъ какъ выраженіе «$\frac{2}{3}$ раза» не имѣетъ смысла. Мы условимся, что степень $a^{\frac{m}{n}}$ представляетъ собою только **иной видъ радикала,** у котораго показатель подкоренного числа есть m, а показатель самаго радикала есть n. Такимъ образомъ, $a^{\frac{2}{3}}$ есть не что иное, какъ $\sqrt[3]{a^2}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ есть иной видъ выраженія $\sqrt{1+x}$, и т. п.

Условно допускаютъ также и отрицательные дробные показатели, принимая, что число съ такимъ показателемъ равносильно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель—то же число съ положительнымъ показателемъ, одинаковымъ по абсолютной величинѣ съ отрицательнымъ показателемъ; такъ:

$$a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

162. Дробные показатели даютъ возможность представить ирраціональное выраженіе безъ знаковъ радикала; напр., выраженіе $3\sqrt{a}\sqrt[3]{x^2}$ можно представить такъ: $3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$. Конечно, такое преобразованіе измѣняетъ только внѣшній видъ выраженія, а не содержаніе его; однако подобное измѣненіе вида имѣетъ важное значеніе, такъ какъ **всѣ дѣйствія надъ степенями, имѣющими дробныхъ показателей, можно производить по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для цѣлыхъ показателей.** Докажемъ это.

163. Основное свойство дробнаго показателя. **Если дробный показатель $\frac{m}{n}$ замѣнимъ равнымъ ему**

дробнымъ показателемъ $\frac{m'}{n'}$**, то величена степени не измѣнится.** Пусть $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$; требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$. Для доказательства замѣнимъ степени съ дробными показателями ихъ настоящими значеніями:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};\quad a^{\frac{m'}{n'}}=\sqrt[n']{a^{m'}}.$$

Приведя эти радикалы къ одинаковому показателю, получимъ:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nn']{a^{mn'}};\quad \sqrt[n']{a^{m'}}=\sqrt[n'n]{a^{m'n}}.$$

Но изъ равенства: $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, (которое можно разсматривать, какъ пропорцію) слѣдуетъ, что $mn'=nm'$; значитъ:

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}}=\sqrt[n'n]{a^{m'n}},\ \text{т.-е.}\ \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}},\ \text{или:}\ a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$$

Основываясь на этомъ свойствѣ, мы можемъ преобразовывать дробнаго показателя совершенно такъ, какъ обыкновенную дробь, лишь бы только преобразованіе не измѣняло величины показателя; напр., мы можемъ числителя и знаменателя дробнаго показателя умножить или раздѣлить на одно и то же число (сравн. съ § 153).

164. Дѣйствія надъ степенями съ дробными показателями.

Умноженіе. Требуется доказать, что: $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Док.: $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=$

$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Полагая $n=1$, или $q=1$, найдемъ, что правило о сложеніи показателей распространяется и на тотъ случай, когда одинъ изъ показателей дробь, а другой цѣлое число.

Дѣленіе. Требуется доказать, что: $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$.

Док: $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} =$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Возвышеніе въ степень. Требуется доказать, что:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

Док: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} =$

$$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Извлеченіе корня. Въ нашемъ курсѣ не встрѣтится надобности разсматривать радикалы съ дробными показателями; поэтому мы будемъ всегда предполагать, что показатель корня есть число цѣлое положительное. Требуется доказать, что:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n} : p}.$$

Док.: $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{np}} = a^{\frac{m}{n} : p}.$

165. Если показатели будутъ не только дробные, но и отрицательные, то и тогда къ нимъ можно примѣнять правила, относящіяся до цѣлыхъ положительныхъ показателей. Покажемъ это, напр., для умноженія. Требуется доказать, что:

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

Док.: $a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$

Примѣръ.

$$\frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{1,5}} \cdot \frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{a^3b^5}} = \frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{12}}} = \frac{10a^{\frac{31}{12}}b^{-\frac{17}{6}}}{3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{23}{12}}}$$

$$= \frac{10}{3}a^{\frac{37}{12}}b^{-\frac{57}{12}} = \frac{10}{3}\sqrt[12]{\frac{a^{37}}{b^{57}}} = \frac{10a^3}{3b^4}\sqrt[12]{\frac{a}{b^9}}.$$

Упражненія.

Къ § 158. Слѣдующія дроби изобразить при помощи отрицательныхъ показателей: **766.** $\frac{a^2}{a^5}; \frac{x}{x^3}; \frac{(a+1)^2}{(a+1)^3}$. **767.** $\frac{1}{x}; \frac{1}{x^3}; \frac{1}{(1+x)^2}$.

Вычислить слѣдующія выраженія: **768.** $5^{-2}; 10^{-1}; 2^{-4}$.
769. $(-1)^{-1}; (-2)^{-2}$. **770.** $(1/_2)^{-3}; (0,1)^{-2}$. **771.** $(2\,1/_2)^{-3}; (0,3)^{-4}$.

Къ § 159. Слѣдующія выраженія изобразить безъ знаменателя:
772. $\frac{1}{a^2b}; \frac{2}{a^3b^4}$. **773.** $\frac{3a}{6x}; \frac{x}{3ay^2z^3}$. **774.** $\frac{a}{a+x}; \frac{2a}{a-x}$. **775.** $\frac{3ab}{(1+x)^2(1-x)^3}$.

Къ § 160. Умноженіе. **776.** $a^4 \cdot a^{-4}; x^3 \cdot x^{-2}; x^{-3} \cdot x^2$.
777. $7a^3b^{-1} \cdot 2ab^3$. **778.** $4\,1/_2 a^4x^{-3}y^{-2} \cdot 2a^{-4}x^3y^5$.
779. $5(a+b)^2 \cdot 7(a+b)^{-3}$.

Дѣленіе. **780.** $a^8 : a^{-1}; x^{-2} : x$. **781.** $x^2 : x^{-2}; x^{-2} : x^2$.
782. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5}$. **783.** $25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^2x^3$.

Возвышеніе въ степень. **784.** $(a^{-2})^4; (a^2)^{-4}; (a^{-2})^{-4}$.
785. $(2a^2b^{-3})^2$. **786.** $(1/_2 x^{-3}y^{-2})^{-2}$. **787.** $[3(1-x)^{-2}(1+x)^2]^3$.
788. $\left(\frac{a^{-2}x}{by^{-4}}\right)^2$.

Извлеченіе корня. **789.** $\sqrt{a^{-8}}; \sqrt[3]{x^{-6}}; \sqrt{(a+b)^{-2}}$.
790. $\sqrt[8]{4a^{-2}b^4c^{-6}}$. **791.** $\sqrt{27x^{-3}y^{-6}x^{18}}$.

Различныя дѣйствія. **792.** $\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)^2\right]^{-3}$.

793. $\sqrt{3a^{-2}\sqrt[3]{27x^{-12}y^{6}}}$. **794.** $(2a^{-1}-1)(2a^{-1}+1)$.

795. $(a^{-2}-1^{-1})^{2}$. **796.** $[-2(a+x)^{-3}y^{5}z^{-2}]^{2}$. **797.** $\frac{5a^{-3}b}{7m^{3}n^{-1}}:\frac{7ab^{-2}}{5m^{2}n^{-2}}$.

Къ §§ 161 и 162. Изобразить безъ знака радикала слѣдующія выраженія:

798. $\sqrt{a^{3}}$, $\sqrt{a}$. **799.** $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{a^{2}}$. **800.** $\sqrt{a+b}$, $\sqrt[3]{1+x}$, $\sqrt[3]{(1+x)^{2}}$.

801. $\sqrt{a^{-1}}$, $\sqrt{x^{-5}}$, $\sqrt[3]{x^{-2}}$. **802.** $\sqrt[3]{2ab}$. **803.** $\sqrt{3a}$, $\sqrt[3]{2a}$.

804. $5\sqrt[3]{2a}$, $\sqrt[3]{6b^{2}x^{-1}}$.

Въ слѣдующихъ выраженіяхъ дробные показатели замѣнить радикалами:

805. $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$. **806.** $a^{-\frac{1}{6}}$, $a^{-\frac{2}{3}}$. **807.** $(1+x)^{\frac{1}{3}}$, $(1+x)^{\frac{2}{3}}$.

808. $[3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{1}{3}}$.

Къ § 163. Доказать слѣдующія равенства:

809. $a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{4}}$; $a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{4}{6}}$; $x^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{9}{12}}$.

Къ §§ 164 и 165. Умноженіе. **810.** $x^{\frac{1}{2}}.\ x^{\frac{2}{3}}$. **811.** $a^{3}.\ a^{\frac{1}{3}}.\ a^{\frac{1}{4}}$.

812. $\sqrt[3]{a^{2}}.\ a^{\frac{2}{3}}$. **813.** $\frac{2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{3m^{3}x^{\frac{2}{3}}}.\ \frac{5a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}}{2m^{-3}y^{\frac{1}{3}}}$.

Дѣленіе. **814.** $a^{\frac{3}{4}}:a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{3}{4}}$. **815.** $5(a-1)^{\frac{2}{3}}:2(a-1)^{\frac{1}{3}}$.

816. $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}:4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$. **817.** $\sqrt[3]{3a^{2}b}:4ab^{3}$.

Возвышеніе въ степень. **818.** $(a^{\frac{3}{4}})^{2}$; $(a^{\frac{3}{4}})^{-2}$; $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}$.

819. $(a^{3})^{\frac{1}{3}}$, $(a^{-3})^{-\frac{1}{3}}$; **820.** $(4a^{2}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$. **821.** $(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$.

Извлеченіе корня. **822.** $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{3}}}$. **823.** $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$.

824. $\sqrt[3]{(a+b)^{-\frac{1}{2}}}$. **825.** $\sqrt[4]{16a^{-\frac{1}{2}}b^{0,1}}$.

Различныя дѣйствія. **826.** $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})^2$. **827.** $(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}})$.
828. $(2a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}})^2$. **829.** $(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}})^2$.

830. $\left[\frac{c^2d}{(a+b)^{\frac{3}{2}}}\right]^{-\frac{4}{3}}$. $\sqrt{\left[\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{ab}}\right]^2}$.

ЛОГАРИѲМЫ.

Предварительныя понятія.

166. Опредѣленіе логариѳма. Возьмемъ какое-нибудь число, напр. 4, и станемъ его возвышать въ различныя степени, какъ съ положительными, такъ и съ отрицательными показателями, цѣлыми и дробными. Тогда будемъ получать различныя числа; напр.:

$$4^0=1,\quad 4^1=4,\quad 4^2=16,\quad 4^3=64,\quad 4^4=256;$$

$$4^{-1}=\frac{1}{4^1}=\frac{1}{4};\quad 4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16};\quad 4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64};$$

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2;\quad 4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}=1,587\ldots;\quad 4^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}=2,519\ldots$$ [1])

$$4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2};\quad 4^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4^2}}=\frac{1}{2,519\ldots}=0,39\ldots$$

Условимся называть: число, возвышаемое въ степень,— **основаніемъ,** результатъ возвышенія въ степень—**числомъ** и показателя степени—**логариѳмомъ.**

Такъ, въ равенствѣ $4^3=64$ основаніе есть 4, число 64, а логариѳмъ 64-хъ по основанію 4 есть 3.

[1]) Когда показатели числа дробныя, т.-е. когда они выражаютъ *корни* какой-нибудь степени, мы условимся брать только *ариѳметическія* значенія корней (§ 152).

Вообще, **логариѳмомъ числа N по основанію *a*, наз. показатель степени, въ которую надо возвысить основаніе *a*, *чтобы получить число* N.**

Значитъ, если говорятъ, что логариѳмъ числа N по основанію a есть x, то это надо понимать, что x удовлетворяетъ уравненію: $a^x=N$.

Что логариѳмъ числа N по основанію a есть x, выражаютъ часто такими обозначеніями:

$$\mathrm{Log}_a N=x, \quad \log_a N=x \quad \text{или} \quad \lg_a N=x,$$

гдѣ знаки Log, log или lg представляютъ собою сокращеніе слова «логариѳмъ», а буква (или число), поставленное внизу знака, означаетъ основаніе, по которому взятъ логариѳмъ. Эту букву не пишутъ, если заранѣе извѣстно, какое число взято за основаніе.

Примѣръ. Если за основаніе взять число 4, то, какъ видно изъ написанныхъ выше равенствъ:

$$\log 1=0;\ \log 4=1;\ \log 16=2;\ \log 64=3;\ \log 256=4;$$

$$\log\tfrac{1}{4}=-1;\ \log\tfrac{1}{16}=-2;\ \log\tfrac{1}{64}=-3;$$

$$\log 2=\tfrac{1}{2};\ \log 1{,}587...=\tfrac{1}{3};\ \log 2{,}519...=\tfrac{2}{3};$$

$$\log\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2};\ \log 0{,}39...=-\tfrac{2}{3} \text{ и т. п.}$$

Подобно этому найдемъ, что если основаніе равно 10, то: $\log 10=1$, $\log 100=2$, $\log 1000=3$; $\log 0{,}1=-1$, $\log 0{,}01=-2$; $\log 0{,}001=-3$ и т. д.

Нѣкоторыя свойства логариѳмовъ.

167. 1. При всякомъ основаніи (отличномъ отъ 1) **логариѳмъ самого основанія равенъ 1, а логариѳмъ 1 есть 0.**

Напр., если основаніе есть 10, то $\log 10=1$, потому что $10^1=10$, и $\log 1=0$, потому что $10^0=1$[1]).

2. При положительномъ основаніи отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ.

---

[1]) Если бы основаніе было равно 1, то логариѳмъ основанія былъ бы равенъ любому числу, такъ какъ 1 въ какой угодно степени даетъ 1.

Напр., если основаніе есть положительное число 10, то въ какую бы степень мы ни возвышали это основаніе, никогда не получимъ отрицательнаго числа.

Такъ: $10^2=100$, $10^{-2}={}^1/_{100}$, $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3,16228...$

$$10^{-\frac{1}{2}} = 1 : 3,16228... = 0,316...$$

3. При положительномъ основаніи (отличномъ отъ 1) **для всякаго положительнаго числа можетъ быть найденъ логариѳмъ, точный или приближенный** (съ какою угодно степенью точности) [1].

Если, напр., за основаніе возьмемъ положительное число 10, то какое бы положительное число мы ни взяли, хотя бы очень большое или очень малое, всегда можно найти такого показателя x, при которомъ 10^x или равно взятому числу, или отличается отъ него такъ мало, какъ угодно. Предложеніе это мы примемъ безъ доказательства.

Замѣтимъ, что способы находить логариѳмы разныхъ чиселъ при данномъ основаніи указываются высшей математикой.

4. Когда основаніе больше 1, то бо́льшему логариѳму соотвѣтствуетъ бо́льшее число (и обратно).

Такъ, если основаніе 10, а 4 и 3 будутъ два логариѳма, то число, соотвѣтствующее первому логариѳму ($10^4=10000$), больше числа, соотвѣтствующаго второму логариѳму ($10^3=$ $=1000$).

5. Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Док. Пусть N, N_1, N_2 будутъ какія-нибудь числа, имѣющія соотвѣтственно логариѳмы: x, x_1, x_2 по одному и тому1 :н110 же основаію a.

[1]) Такъ какъ въ этой книгѣ мы ограничиваемся числами только *раціональными*, то здѣсь нельзя утверждать, что всякое положительное число имѣетъ *точный* логариѳмъ.

Тогда: $N=a^x$, $N_1=a^{x_1}$, $N_2=a^{x_2}$.

Перемноживъ эти равенства, получимъ: $NN_1N_2=a^x a^{x_1} a^{x_2}$.

Но при умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$NN_1N_2=a^x a^{x_1} a^{x_2}=a^{x+x_1+x_2}.$$

Откуда: $\log (NN_1N_2)=x+x_1+x_2$.

Но $x=\log N$, $x_1=\log N_1$, $x_2=\log N_2$.

Значитъ: $\log (NN_1N_2)=\log N+\log N_1+\log N_2$.

6. Логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя.

Док. Раздѣлимъ почленно два равенства:

$$N=a^x,\ N_1=a^{x_1}$$

и примемъ во вниманіе, что при дѣленіи показатели одинаковыхъ буквъ вычитаются:

$$\frac{N}{N_1}=\frac{a^x}{a^{x_1}}=a^{x-x_1}.$$

Откуда: $\log\frac{N}{N_1}=x-x_1=\log N-\log N_1$.

7. Логариѳмъ степени равенъ логариѳму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.

Док. Возвысимъ обѣ части равенства $N=a^x$ въ n-ую степень, принявъ во вниманіе, что при возвышеніи степени въ степень показатели степеней перемножаются:

$$N^n=(a^x)^n=a^{xn}.$$

Откуда: $\log N^n=xn=(\log N)n$.

8. Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.

Док. Извлечемъ корень n-ой степени изъ обѣихъ частей равенства $N=a^x$, принявъ во вниманіе, что при извлеченіи корня изъ степени показатель степени дѣлится на показателя корня:

$$\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^x}=a^{\frac{x}{n}}.$$

Откуда: $\log\sqrt[n]{N}=\frac{x}{n}=\frac{\log N}{n}$.

168. Логариѳмированіе алгебраическаго выраженія. Логариѳмировать данное алгебраическое выраженіе значитъ выразить логариѳмъ его посредствомъ логариѳмовъ отдѣльныхъ чиселъ, составляющихъ выраженіе. Пользуясь указанными въ предыдущемъ параграфѣ свойствами 5-мъ, 6-мъ, 7-мъ и 8-мъ, мы легко можемъ логариѳмировать такія выраженія, которыя представляютъ собою произведеніе, частное, степень или корень. Пусть, напр., требуется логариѳмировать слѣдующее выраженіе, которое *обозначимъ* одною буквою N:

$$N=\frac{3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}}{4m^3\sqrt[6]{y}}.$$

Замѣтивъ, что это выраженіе представляетъ собою дробь, пишемъ, на основаніи свойства 6-го:

$$\log N=\log\left(3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}\right)-\log(4m^3\sqrt[6]{y}).$$

Затѣмъ, примѣняя свойство 5-е, получимъ:

$$\log N=\log 3+\log a^2+\log\sqrt{b\sqrt[3]{x}}-\log 4-\log m^3-\log\sqrt[6]{y},$$

и далѣе, на основаніи свойствъ 7 и 8:

$$\log N=\log 3+2\log a+\frac{1}{2}\log(b\sqrt[2]{x})-\log 4-3\log m-\frac{1}{6}\log y=$$

$$=\log 3+2\log a+\frac{1}{2}\left(\log b+\frac{1}{3}\log x\right)-\log 4-3\log m-\frac{1}{6}\log y=$$

$$=\log 3+2\log a+\frac{1}{2}\log b+\frac{1}{6}\log x-\log 4-3\log m-\frac{1}{6}\log y.$$

Логариѳмированіе такимъ образомъ закончено. Если бы понадобилось логариѳмировать такое выраженіе, которое представляетъ собою сумму или разность, то предвари-

тельно такое выраженіе надо привести къ виду, **удобному для логариөмированія,** напр., представить его въ видѣ произведенія; такъ:

$$\log(a^2-b^2)=\log[(a+b)(a-b)]=\log(a+b)+\log(a-b).$$

Умѣя логариөмировать алгебраическія выраженія, мы можемъ, обратно, **по данному результату логариөмированія найти выраженіе** x, которое при логариөмированіи дастъ этотъ результатъ; такъ, если дано:

$$\log x=\log a+\log b-3\log c-\frac{1}{2}\log d,$$

то на основаніи тѣхъ же теоремъ не трудно найти, что

$$x=\frac{ab}{c^3\sqrt{d}}.$$

Свойства десятичныхъ логариөмовъ.

169. Польза логариөмическихъ таблицъ. Имѣя таблицы, въ которыхъ помѣщены логариөмы цѣлыхъ чиселъ, вычисленные по одному и тому же основанію, отъ 1 до какого-нибудь большого числа, мы можемъ производить надъ числами дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ. Положимъ, напр., что надо вычислить $\sqrt[3]{ABC}$, гдѣ A, B и C какія-нибудь данныя цѣлыя числа. Вмѣсто того, чтобы производить умноженіе и затѣмъ извлеченіе кубичнаго корня, мы можемъ, пользуясь таблицами логариөмовъ, найти сначала $\log\sqrt[3]{ABC}$, основываясь на разложеніи:

$$\log\sqrt[3]{ABC}=\frac{1}{3}(\log A+\log B+\log C).$$

Найдя въ таблицахъ отдѣльно $\log A$, $\log B$ и $\log C$, сложивъ ихъ и раздѣливъ сумму на 3, получимъ $\log \sqrt[3]{ABC}$. *По этому логариѳму*, пользуясь тѣми же таблицами, можемъ найти соотвѣтствующее число.

170. На *практикѣ* употребительны таблицы логариѳмовъ, вычисленныхъ при основаніи 10. Такіе логариѳмы называются **обыкновенными** или **десятичными**; по имени шотландскаго математика **Бригга**, введшаго (въ началѣ XVII столѣтія) *эти логариѳмы въ употребленіе*, они называются также **Бригговыми** логариѳмами.

Чтобы *понять устройство* и употребленіе этихъ таблицъ, предварительно разсмотримъ **нѣкоторыя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.**

171. I. Логарифмъ цѣлаго числа, изображаемаго 1-ею съ *нулями* (т.-е. *10, 100, 1000* и т. д.), есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.

Дѣйствительно, такъ какъ:

$$10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000,\ 10^4=10000,..$$

и вообще: $$10^m=\overbrace{100\ldots0}^{m\ \text{нулей}},$$

то $$\log 10=1,\ \log 100=2,\ \log 1000=3,\ \log 10000=4,..$$

и вообще: $$\log \overbrace{100\ldots0}^{m\ \text{нулей}}=m.$$

II. Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго 1-ею съ нулями, можетъ быть выраженъ только приближенно.

Обыкновенно выражаютъ его въ видѣ десятичной дроби съ 5-ю десятичными знаками (значитъ, съ точностью до одной, и даже до половины, стотысячной доли). Цѣлое число логариѳма наз. его **характеристикой**, а дробная десятичная часть—**мантиссой**. Если, напр., приближенный логариѳмъ какого-нибудь числа есть 2,36547, то 2 есть характеристика, а 0,36547 мантисса.

III. Характеристика логариѳма цѣлаго числа или цѣлаго числа съ дробью содержитъ столько единицъ, сколько въ цѣлой части числа находится цыфръ безъ одной.

Возьмемъ, напр., число 5683,72. Такъ какъ:

$$10000 > 5683{,}72 > 1000,$$

то $$\log 10000 > \log 5683{,}72 > \log 1000,$$

т.-е. $$4 > \log 5683{,}72 > 3,$$

значитъ, $\log 5683{,}72 = 3 +$ полож. правильная дробь,

т.-е. характеристика $\log 5683{,}72 = 3$.

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что характ. $\log 7{,}3 = 0$, характ. $\log 28^3/_4 = 1$, характ. $\log 4569372 = 6$ и т. п.

172. Логариѳмы съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой.

Прежде, чѣмъ указывать другія свойства десятичныхъ логариѳмовъ, мы должны сдѣлать предварительно слѣдующее разъясненіе. Всякое число [1]), меньшее 1, можно выразить правильною дробью $^a/_b$. Но такъ какъ

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

и $$\log a < \log b,$$

то **логариѳмъ всякаго числа, меньшаго единицы, есть отрицательное число;** значитъ онъ состоитъ изъ отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы. На практикѣ однако предпочитаютъ преобразовать такіе логориѳмы такъ, чтобы у нихъ отрицательной была только одна характеристика. Чтобы у **отрицательнаго логариѳма сдѣлать мантиссу положительной, достаточно прибавить къ его мантиссѣ положительную единицу, а къ характеристикѣ отрицательную единицу** (отчего, конечно, величина ло-

---

[1]) Здѣсь рѣчь идетъ только о числахъ раціональныхъ.

гариѳма не измѣнится). Если, напр., мы имѣемъ отрицательный логариѳмъ —2,08734, то можемъ написать:

$$-2{,}08734=-2-0{,}08734=-2-1+1-0{,}08734=$$
$$=-2-1+(1-0{,}08734)=-3+0{,}91266$$

или сокращено: $-2{,}08734=\overset{-1+1}{-2{,}08734}=\bar{3}{,}91266$.

Для указанія того, что у логариѳма отрицательна только одна характеристика, ставятъ надъ ней минусъ; такъ, вмѣсто того, чтобы писать: $-3+0{,}91256$, пишутъ короче: $\bar{3}{,}91266$ [1]).

Для обратнаго преобразованія, т.-е. чтобы **логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой превратить въ отрицательный, достаточно приложить къ мантиссѣ отрицательную единицу, а къ характеристикѣ положительную**; такъ:

$$\bar{7}{,}83026=-7+0{,}83026=-7+1-1+0{,}83026=(-7+1)$$
$$-(1-0{,}83026)=-6-0{,}16974=-6{,}16974.$$

или сокращено: $\bar{7}{,}83026=\overset{+1-1}{\bar{7}{,}83026}=-6{,}16974$.

173. Теперь мы можемъ указать слѣдующія свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

IV. Если десятичная дробь выражается 1-ею съ предшествующими нулями (0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), то логариѳмъ ея состоитъ изъ одной характеристики, содержащей столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.

Дѣйствительно, такъ какъ:

$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$; $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0{,}01$; $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0{,}001$; и т. д.

то $\log 0{,}1=-1$; $\log 0{,}01=-2$; $\log 0{,}001=-3$ и т. д.

---

[1]) Такое число произносятъ такъ: 3 съ минусомъ 91266.

V. Логариөмъ всякой другой правильной десятичной дроби, если его мантисса сдѣлана положительной, содержитъ въ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятичной дроби передъ первой значащей цыфрой, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.

Возьмемъ, напр., дробь 0,00035, у которой передъ первой значащей цыфрой стоятъ 4 нуля, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ. Тогда очевидно, что:

$$\overbrace{0{,}001}^{3\text{ нуля}} > \overbrace{0{,}00035}^{4\text{ нуля}} > \overbrace{0{,}0001}^{4\text{ нуля}}.$$

Слѣдовательно: $\log 0{,}001 > \log 0{,}00035 > \log 0{,}0001$,

т.-е. $-3 > \log 0{,}00035 > -4$.

Такъ какъ изъ двухъ чиселъ: -3 и -4 послѣднее меньше перваго, то можно положить что:

$$\log 0{,}00035 = -4 + \text{полож. прав. дробь.}$$

Значитъ, характ. $\log 0{,}00035 = -4$ (при положительной мантиссѣ).

Подобнымъ же образомъ можемъ убѣдиться, что

хар. $\log 0{,}25 = -1$, хар. $\log 0{,}000048 = -5$ и т. п.

VI. Если число умножимъ или раздѣлимъ на 10, 100, 1000 и т. д., то положительная мантисса логариөма не измѣнится.

Напр., умножимъ или раздѣлимъ число N на 1000; тогда

$$\log (N \,.\, 1000) = \log N + \log 1000 = \log N + 3$$

и

$$\log \frac{N}{1000} = \log N - \log 1000 = \log N - 3.$$

Такъ какъ въ суммѣ $\log N + 3$ цѣлое число 3 прибавляется, очевидно, къ характеристикѣ, а не къ мантиссѣ, и въ разности $\log N - 3$ это цѣлое число можно всегда вычитать также изъ характеристики, то ясно, что мантисса у $\log (N \,.\, 1000)$ и у $\log (N : 1000)$ та же самая, что и у $\log N$.

Слѣдствія. 1) Положительная мантисса логариѳма десятичнаго числа не измѣняется отъ перенесенія въ числѣ запятой, потому что перенесеніе запятой равносильно умноженію или дѣленію на 10, 100, 1000 и т. д. Такимъ образомъ, логариѳмы чиселъ:

0,00423, 0,0423, 0,423, 4,23, 423

отличаются только характеристиками, но не мантиссами, при условіи, что всѣ мантиссы положительны.

2) **Мантиссы чиселъ, имѣющихъ одну и ту же значащую часть, но отличающихся только нулями на концѣ, одинаковы;** такъ, логариѳмы чиселъ: 23, 230, 2300, 23000 отличаются только характеристиками.

174. Замѣчаніе. Изъ указанныхъ нами свойствъ логариѳмовъ видно, что характеристику логариѳма цѣлаго числа и десятичной дроби мы можемъ находить безъ помощи таблицъ; вслѣдствіе этого въ логариѳмическихъ таблицахъ помѣщаются только однѣ мантиссы; кромѣ того, такъ какъ нахожденіе логариѳмовъ дробей сводится къ нахожденію логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ (логариѳмъ дроби = логариѳму числителя безъ логарифма знаменателя), то въ таблицахъ помѣщаются мантиссы логариѳмовъ только цѣлыхъ чиселъ.

Устройство и употребленіе таблицъ.

175. Устройство таблицъ. Опишемъ вкратцѣ устройство и употребленіе пятизначныхъ таблицъ, изданныхъ Пржевальскимъ, какъ наиболѣе употребительныхъ въ курсѣ среднихъ учебныхъ заведеній. Эти таблицы содержатъ логариѳмы чиселъ отъ 1 до 10009, вычисленныя съ 5-ю десятичными знаками, при чемъ послѣдній изъ этихъ знаковъ увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ,

когда 6-й десятичный знакъ долженъ бы оказаться 5 или болѣе 5; слѣд., пятизначныя таблицы даютъ приближенныя мантиссы **съ точностью до $^1/_2$ стотысячной доли** (съ недостаткомъ или съ избыткомъ).

На первой страницѣ помѣщены числа отъ 1 до 100 въ столбцахъ съ надписью *N* (numerus—число). Противъ каждаго числа, въ столбцахъ съ надписью Log, находятся мантиссы, вычисленныя съ 5-ю десятичными знаками.

Слѣдующія страницы устроены иначе. Въ первомъ столбцѣ подъ рубрикою *N*, помѣщены числа отъ 100 до 1000, а рядомъ съ ними въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ цыфра 0, находятся соотвѣтствующія мантиссы; первыя двѣ цыфры мантиссъ, общія нѣсколькимъ логариѳмамъ, написаны только разъ, а остальныя три цыфры помѣщены рядомъ съ числомъ, находящимся въ столбцѣ *N*. Эти же мантиссы принадлежатъ и числамъ, которыя получатся, если къ числамъ, стоящимъ подъ рубрикою *N*, приписать справа 0. Такъ, мантисса логар. 5690 будетъ та же, что и у числа 569, т.-е. 75511 (стран. 17-я). Слѣдующіе столбцы съ надписями надъ ними: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, служатъ для нахожденія логариѳмовъ четырехзначныхъ чиселъ (и пятизначныхъ до 10009), оканчивающихся на эти значащія цыфры, при чемъ первыя три цыфры каждаго изъ этихъ чиселъ помѣщены въ столбцѣ *N*, а послѣднюю надо искать наверху, въ ряду цыфръ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Такъ, чтобы найти мантиссу логариѳма числа 5673, надо отыскать въ столбцѣ *N* число 567 (стран. 17) и наверху цыфру 3; въ пересѣченіи горизонтальной линіи, идущей отъ 567, съ вертикальной линіей, опущенной отъ цыфры 3, находятся три послѣднихъ цыфры мантиссы (381), первыя же ея цыфры надо искать въ столбцѣ подъ цыфрою 0 на одной горизонтальной линіи, или выше: такъ, для числа 5673 первыя двѣ цыфры мантиссы

будутъ 75, а послѣднія 381, такъ что всѣ пять знаковъ будутъ 75381. Если передъ послѣдними тремя цыфрами мантиссы стоитъ въ таблицахъ звѣздочка, то это значитъ, что первыя двѣ цыфры надо брать ниже горизонтальной *линіи, на которой расположены послѣднія цыфры мантиссы.* Такъ, для числа 5758 мантисса будетъ 76027 (стран. 17).

176. По данному десятичному числу найти логариѳмъ. Характеристику логариѳма цѣлаго числа или десятичной дроби мы выставляемъ непосредственно, руководствуясь указанными нами свойствами десятичныхъ логариѳмовъ.

При нахожденіи мантиссы мы примемъ во вниманіе, что положеніе запятой въ десятичномъ числѣ, а также и число нулей на концѣ цѣлаго числа, не оказываютъ вліянія на мантиссу (§ 173, слѣдствія); поэтому мы можемъ отбросить запятую въ десятичной дроби и въ цѣломъ числѣ зачеркнуть всѣ нули, если они есть на концѣ числа. Тогда могутъ представиться слѣдующіе 2 случая.

1) **Цѣлое число не превосходитъ 10009.** Тогда мантисса находится прямо изъ таблицъ. Приведемъ примѣры:

Log 82 = 1,91381; Log 0,082 = $\bar{2}$,91381 (стран. 1);
Log 2560 = 3,40824; Log 256000 = 5,40824 (стран. 7);
Log 7416 = 3,87017; Log 74,16 = 1,87017 (стран. 23).

Въ этомъ случаѣ найденная мантисса будетъ точна до ½ стотысячной доли.

2) **Цѣлое число превосходитъ 10009.** Тогда мантисса находится на основаніи слѣдующей истины, которую мы примемъ безъ доказательства:

если числа болѣе 1000, и разности между ними не превосходятъ 1, то безъ чувствительной ошибки можно принять, что разности между числами пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами.

Принявъ это, положимъ, что требуется найти логариѳмъ числа 74,2354, которое, по отбрасываніи запятой, даетъ цѣлое число, превосходящее 10009.

Перенесемъ въ немъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось наибольшее число, какое только можно найти въ таблицахъ; въ нашемъ примѣрѣ для этого достаточно перенести запятую вправо на два знака. Теперь будемъ искать

$$\text{Log } 7423{,}54=?\,.$$

Выписываемъ изъ таблицъ (стран. 23) мантису логариѳма числа 7423 и находимъ такъ называемую **табличную разность,** т.-е. разность между взятой мантиссой и слѣдующей бо́льшей (соотвѣтствующей числу 7424). Для этого вычитаемъ (въ умѣ) изъ 064 (изъ трехъ послѣднихъ цыфръ мантиссы числа 7424) число 058 (три послѣднія цыфры мантиссы числа 7423); находимъ 6 (стотысячн.). Значитъ:

$$\text{Log } 7423=3{,}87058;$$

$$\text{Log } 7424=3{,}87058+6 \text{ (стотыс.)}.$$

Обозначимъ буквою Δ, то неизвѣстное число стотысячныхъ, которое надо приложить къ Log 7423, чтобы получить Log 7423,54; тогда можемъ написать:

$$\text{Log } 7423{,}54=3{,}87058+\Delta \text{ (стотыс.)}.$$

Изъ этихъ 3-хъ равенствъ мы видимъ, что если число 7423 увеличится на 1, то логариѳмъ его увеличится на 6 (стотыс)., а если то же число увеличится на 0,54 то логариѳмъ его увеличится на Δ (стотыс.).

На основаніи указанной выше пропорціональности можемъ написать пропорцію:

$\Delta : 6=0{,}54 : 1$; откуда: $\Delta=6\,.\,0{,}54=3{,}24$ (стотыс.).

Приложивъ къ 3,87058 найденную разность, мы найдемъ Log 7423,54. Такъ какъ мы ограничиваемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, то въ числѣ 3,24 можемъ отбросить

цыфры 2 и 4, представляющія собою милліонныя и десятимилліонныя доли; при этомъ, для уменьшенія ошибки, будемъ всегда руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: если отбрасываемая часть больше (или равна) 5 милліонныхъ, то отбрасывая ее, мы увеличимъ на 1 оставшееся число стотысячныхъ; въ противномъ же случаѣ оставимъ число стотысячныхъ безъ измѣненія. Такимъ образомъ:

$$\text{Log } 7423{,}54 = 3{,}87058 + 3 \text{ стотыс.} = 3{,}87061.$$

Такъ какъ Log 74,2354 долженъ имѣть ту же самую мантиссу, а характеристика его должна быть 1, то

$$\text{Log } 74{,}2354 = 1{,}87061.$$

Правило. Чтобы найти мантиссу даннаго цѣлаго числа, имѣющаго 5 или болѣе цыфръ, выписываютъ изъ таблицъ мантиссу числа, составленнаго первыми 4 цыфрами даннаго числа, и къ ней прибавляютъ произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную остальными цыфрами даннаго числа, при чемъ вмѣсто точной величины этого произведенія берутъ ближайшее къ нему цѣлое число.

177. По данному логариѳму найти десятичное число. Пусть требуется найти число, котораго логариѳмъ равенъ $\bar{1}{,}51001$. Не обращая пока вниманія на характеристику, отыскиваемъ въ таблицахъ сначала первыя двѣ цыфры мантиссы, а потомъ и остальныя три. Оказывается, что въ таблицахъ есть мантисса 51001, соотвѣтствующая числу 3236. Принявъ во вниманіе характеристику, окончательно пишемъ:

$$\bar{1}{,}51001 = \text{Log } 0{,}3236.$$

Чаще случается, что данная мантисса не находится въ таблицахъ. Пусть, напр., намъ данъ логариѳмъ, у котораго мантисса есть 59499, не встрѣчающаяся въ таблицахъ,

и какая-нибудь характеристика, напр., 2. Тогда искомое число можно найти простымъ вычисленіемъ, подобнымъ тому, которымъ мы находили логариѳмъ числа, не помѣщающагося въ таблицахъ.

Предположимъ сначала, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, т.-е. что данный логариѳмъ есть 3,59499. Беремъ изъ таблицъ мантиссу 59494, ближайшую меньшую къ данной, выписываемъ четырехзначное число 3935, соотвѣтствующее ей, и опредѣляемъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность 12 (стотыс.) между взятой мантиссой и слѣдующей бо́льшей (соотвѣтствующей числу 3936). Такимъ образомъ

$$3{,}59494 = \mathrm{Log}\ 3935;$$
$$3{,}59494 + 12\ \text{стотыс.} = \mathrm{Log}\ 3936.$$

Опредѣлимъ еще разность 5 (стотыс.) между данной мантиссой (59499) и мантиссой, взятой изъ таблицъ (59494), и обозначимъ буквою h ту неизвѣстную дробь, которую надо приложить къ числу 3935, чтобы логариѳмъ его увеличился на 5 (стотыс.). Тогда

$$3{,}59494 + 5\ \text{стотыс.} = \mathrm{Log}\ (3935 + h).$$

Изъ этихъ 3-хъ равенствъ усматриваемъ, что если логариѳмъ увеличивается на 12 (стотыс.), то соотвѣтствующее число увеличивается на 1, а если логариѳмъ увеличивается на 5 (стотыс.), то число увеличивается на h. На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$12 : 5 = 1 : h \quad \text{откуда:}\ h = \frac{5}{12} = 0{,}4\ldots$$

Значитъ, число, соотвѣтствующее логариѳму 3,59499, равно 3935+0,4...=3935,4...; а такъ какъ характеристика даннаго логариѳма есть 2, а не 3, то искомое число равно 393,54..., такъ что можно написать:

$$2{,}59499 = \mathrm{Log}\ 393{,}54\ldots$$

Правило. Чтобы найти число по данному логариѳму, сначала находятъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу и соотвѣтствующее ей четырехзначное число; затѣмъ къ этому числу прибавляютъ частное, выраженное десятичной дробью, отъ дѣленія разности между данной *мантиссой и ближайшей меньшей на соотвѣтствующую* табличную разность [1]; наконецъ, въ полученномъ числѣ ставятъ запятую сообразно характеристикѣ даннаго логариѳма.

178. Дѣйствія надъ логариѳмами съ отрицательными характеристиками. Сложеніе и вычитаніе не представляютъ никакихъ затрудненій, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$$\begin{array}{r}\bar{2},97346\\ +\;1,83027\\ \hline 0,80373\end{array}\qquad\begin{array}{r}\bar{3},73846\\ +\;\bar{5},98043\\ \hline \bar{7},71889\end{array}\qquad\begin{array}{r}\bar{1},03842\\ -\;5,96307\\ \hline \bar{7},07535\end{array}\qquad\begin{array}{r}0,00523\\ -\;\bar{4},57365\\ \hline 3,43158\end{array}$$

Не представляетъ никакихъ затрудненій также и умноженіе логариѳма на положительное число; напр.:

$$\begin{array}{r}\bar{3},58376\\ \times\;9\\ \hline \overline{22},25384\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}\bar{2},47356\\ \times\;34\\ \hline 189424\\ 142068\\ \hline 16,10104\\ -68\\ \hline \overline{52},10104\end{array}$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ отдѣльно умножена положительная мантисса на 34, затѣмъ отрицательная характеристика на 34.

---

[1]) Частное это достаточно вычислить съ точностью до $\frac{1}{2}$ десятой, такъ какъ бо́льшая точность все равно не достигается.

Если логариѳмъ съ отриц. характеристикой и полож. мантиссой умножается на отрицательное число, то поступаютъ двояко: или предварительно данный логариѳмъ обращаютъ въ отрицательный, или же умножаютъ отдѣльно мантиссу и характеристику, и результаты соединяютъ вмѣстѣ; напр.:

1) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = -2,43673 \cdot (-4) = 9,74692.$

2) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = +12 - 2,25308 = 9,74692.$

При дѣленіи могутъ представиться два случая: отрицательная характеристика 1) дѣлится и 2) не дѣлится на дѣлителя. Въ первомъ случаѣ отдѣльно дѣлятъ характеристику и мантиссу:

$$\overline{10},37846 : 5 = \bar{2},07569.$$

Во второмъ случаѣ прибавляютъ къ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, чтобы образовавшееся число дѣлилось на дѣлителя; къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = (-8 + 5,76081) : 8 = \bar{1},72010.$$

Это преобразованіе надо совершать въ умѣ, такъ что дѣйствіе располагается такъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = \bar{1},72010 \text{ или } \begin{array}{l|l} \bar{3},76081 & 8 \\ \hline & \bar{1},72010 \end{array}$$

179. Примѣры вычисленій помощью логариѳмовъ.

Примѣръ I. Вычислить выраженіе:

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \sqrt[3]{D}},$$

если $A = 0,821573$, $B = 0,04826$, $C = 0,0051275$ и $D = 7,24635$.

Логариѳмируемъ данное выраженіе:

$$\text{Log}\, x = \tfrac{1}{3}\,\text{Log}\, A + 4\,\text{Log}\, B - 3\,\text{Log}\, C - \tfrac{1}{3}\,\text{Log}\, D.$$

Теперь производимъ вычисленіе Log x и затѣмъ x:

Предварительныя вычисленія.

A) Числу 8215 соотвѣтствуетъ въ таблицахъ мантисса 91461, при чемъ табличная разность есть 5 (стотыс.). Произведеніе этой разности на 0,73 составляетъ 3,65. Ближайшее къ этому произведенію цѣлое число есть 4 стотыс.). Значитъ, искомая мантисса должна быть 91461+4=91465 (стотыс.). Поэтому

$$\text{Log}\, 0{,}821573 = \bar{1}{,}91465 \text{ и } {}^{1}/_{3}\,\text{Log}\, 0{,}821573 = \bar{1}{,}97155.$$

B) Изъ таблицъ находимъ:

$$\text{Log}\, 0{,}0482 = \bar{2}{,}68359 \text{ и потому } 4\,\text{Log}\, 0{,}0482 = \bar{6}{,}73436.$$

C) Числу 5127 соотвѣтствуетъ въ таблицахъ мантисса 70986, при чемъ табличная разность есть 9 (стотыс.). Произведеніе ея на 0,5 равно 4,5 (стотыс.); ближайшее цѣлое число равно 5 (стотыс.). Значитъ, искомая мантисса должна быть 70986+5=70991. Поэтому

$$\text{Log}\, 0{,}0051275 = \bar{3}{,}70991 \text{ и } 3\,\text{Log}\, 0{,}0051275 = \bar{7}{,}12973.$$

D) Числу 7246 соотвѣтствуетъ въ таблицахъ мантисса 86010, при чемъ табличная разность равна 6 (стотыс.). Произведеніе ея на 0,35 составляетъ 2,10 (стотыс.); ближайшее цѣлое число есть 2 (стотыс.). Значитъ, искомая мантисса должна быть 86010+2=86012 и потому

$$\text{Log}\, 7{,}24635 = 0{,}86012 \text{ и } {}^{1}/_{3}\,\text{Log}\, 7{,}24635 = 0{,}28671.$$

Окончательныя вычисленія.

$$+\begin{array}{r} {}^{1}/_{3}\,\text{Log}\, A = \bar{1}{,}97155 \\ 4\,\text{Log}\, B = \bar{6}{,}73436 \\ \hline \bar{6}{,}70591 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 3\,\text{Log}\, C = \bar{7}{,}12973 \\ {}^{1}/_{3}\,\text{Log}\, D = 0{,}28671 \\ \hline \bar{7}{,}41644 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\overline{6},70591 \\ \overline{7},41644 \\ \hline \text{Log}\ x=1,28947 \end{array}$$

Въ таблицахъ ближайшая меньшая мантисса есть 28937; ей соотвѣтствуетъ число 1947, при чемъ табличная разность равна 22, а разность между данной мантиссой и ближайшей меньшей есть 10. Частное отъ дѣленія второй на первую составляетъ 0,5. Значитъ, искомое число (принимая во вниманіе характеристику) есть:

$$x=19,475.$$

Примѣръ 2. Вычислить

$$x=(-2,31)^3\sqrt[5]{72}=-(2,31)^3\sqrt[5]{72}.$$

Такъ какъ искомое число отрицательное, а отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, то предварительно находимъ положительное число $y=(2,31)^3\sqrt[5]{72}$, а потомъ и x.

$$\log y=3\ \log 2,31+\tfrac{1}{5}\log 72$$

$$\log 2,31=0,36361 \qquad 3\log 2,31=1,09083$$

$$\log 72=1,85733 \qquad \frac{1}{5}\log 72=0,37147$$

$$\log\ y=1,46230$$

Въ таблицахъ ближайшая меньшая мантисса есть 46225, соотвѣтствующая числу 2899, при чемъ табличная разность равна 15. Разность между данной мантиссой и ближайшей меньшей составляетъ 5. Частное отъ дѣленія второй на первую равно 0,3. Значитъ:

$$y=28,993 \text{ и } x=-28,993.$$

Примѣръ 3. Вычислить $x=\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}+\sqrt[4]{3}}.$

Сплошного логариѳмированія здѣсь примѣнить нельзя, ктакъ акъ подъ знакомъ корня стоитъ сумма. Въ подобныхъ

случаяхъ вычисляютъ формулу **по частямъ.** Сначала находимъ $N=\sqrt[5]{8}$, потомъ $N_1=\sqrt[4]{3}$; далѣе простымъ сложеніемъ опредѣляемъ $N+N_1$ и, наконецъ, вычисляемъ $\sqrt[3]{N+N_1}$.

$$\log N=\tfrac{2}{5}\log 8=0{,}18062;\ N=1{,}5157.$$
$$\log N_1=\tfrac{1}{4}\log 3=0{,}11928;\ N_1=1{,}3160;$$
$$N+N_1=2{,}8317.$$
$$\log\sqrt[3]{N+N_1}=\tfrac{1}{3}\log 2{,}8317=0{,}15068;\ \sqrt[3]{N+N_1}=1{,}4147.$$

Упражненія.

Къ § 166. **831.** Написать при помощи знака log слѣдующія равенства: $10^0=1$; $10^1=10$; $10^2=100$; $100^{-2}=0{,}01$; $a^x=N$.

832. Переписать безъ знака log слѣдующія равенства: $\log_{10}1000=3$; $\log_{10}0{,}001=-3$; $\log_{16}4=1/2$; $\log_a P=y$.

833. Если за основаніе взять 16, то какіе логариѳмы будутъ у слѣдующихъ чиселъ: 16, 256, $1/16$, $1/256$, 4, $1/4$, 2, $1/2$.

834. Если основаніе равно 10, то какіе логариѳмы будутъ у слѣдующихъ чиселъ: 10, 100, 1000, 10000; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

835. Найти: $\log_2 4096$; $\log_4 4096$; $\log_8 4096$; $\log_{16} 4096$; $\log_8 8$; $\log_{64} 8$; $\log_{512} 8$.

Къ § 168. Логариѳмировать слѣдующія выраженія:

836. $\log(a^2b^3)$. **837.** $\log(5a^3x^2)$. **838.** $\log(mn)^3$. **839.** $\log\frac{2a^2}{3b^3}$.

840. $\log\frac{4a^3b^{-3}}{5mn^4x^{\frac{1}{2}}}$. **841.** $\log\sqrt{ab}$. **842.** $\log\sqrt[3]{7a^3b}$.

843. $\log(4\sqrt[5]{2ab^3})$. **844.** $\log(7a^3b\sqrt[3]{c})$. **845.** $\log\sqrt{10a\sqrt[3]{b^2}}$.

846. $\log\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$. **847.** $\log\frac{a^2\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$.

848. $\log(a^2-b^2)$. **849.** $\log(a-b)^2$.

Найти выраженіе x, если его логариѳмъ равенъ:

850. $\log x=\log a+\log b$. **851.** $\log x=\log a-\log b$. **852.** $\log x=2\log a$. **853.** $\log x=2\log a+3\log b-\log c$. **854.** $\log x=1/2\log a$.

855. $\log x=1/3(\log a+\log b)$. **856.** $\log x=1/2[\log a+1/2(\log b+2/3\log c)]$.

Къ § 171. III. **857.** Найти характеристики логариѳмовъ слѣдующихъ чиселъ: 3, 38, 382, 3824; 3,1; 3,12; 37,2; 56315, 726; 57; $57^1/_2$; $3485^2/_7$.

Къ § 172. **858.** У слѣдующихъ отрицательныхъ логариѳмовъ сдѣлать мантиссы положительными: —2,37805; —1,07380; —0,00340; —5,56000.

859. Слѣдующіе логариѳмы превратить въ отрицательные: $\bar{2},73594$; $\bar{1},08037$; $\bar{4},07630$; $\bar{1},00230$.

Къ § 173. I. **860.** Чему равны десятичные логариѳмы слѣдующихъ дробей: 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001; 0,0000001?

Къ § 173. II. **861.** Найти характеристики десят. логариѳмовъ слѣдующихъ дробей: 0,36; 0,183; 0,02; 0,0036; 0,00056; 0,00000378.

Къ § 176. Найти по таблицамъ логариѳмы слѣдующихъ чиселъ:
862. 9; 26; 573; 57,55; 7,414; 0,7579. **863.** 56348. **864.** 10,0035. **865.** 0,0378467.

Къ § 177. Найти числа по слѣдующимъ логариѳмамъ:
866. 2,86764; 1,34967; 0,01115; 3,14114. **867.** 1,66283.
868. 2,31145. **869.** 0,51008. **870.** $\bar{1},58062$. **871.** 3,74670.
872. —1,08347.
873. —0,63475. **874.** —3,91340.

(Въ послѣднихъ трехъ примѣрахъ предварительно превратить логариѳмы).

Къ § 178. Произвести слѣдующія дѣйствія надъ логариѳмами:

875. $+\begin{cases}\bar{2},73085\\ \bar{3},96839\end{cases} + \begin{cases}1,57340\\ \bar{2},84309\end{cases}$ **876.** $-\begin{cases}\bar{2},03871\\ \bar{1},74569\end{cases} - \begin{cases}0,37560\\ \bar{2},74893\end{cases}$

877. $\bar{2},74029\times 7$. **878.** $\bar{1},40185\times 9$. **879.** $\bar{3},56120\times 36$.
880. $\bar{1},70456\times 18$. **881.** $\bar{2},37409\times(-3)$. **882.** $\bar{3},56030\times(-23)$.
883. $\overline{12},63102 : 4$. **884.** $\bar{3},02745 : 5$. **885.** $\bar{1},00347 : 6$.
886. $\bar{2},50746 : 7$.

Къ § 179. Вычислить помощью логариѳмовъ слѣдующія выраженія:

887. $\sqrt[6]{235,78}$. **888.** $\sqrt[3]{\frac{13}{16}}$. **889.** $\sqrt[3]{17705^5/_6}$. **890.** $(2^5/_6)^9$.

891. $\sqrt[3]{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$. **892.** $243\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}}$ **893.** $(-7,5)^3\sqrt[8]{63}$.

894. $\sqrt[3]{-34{,}56}$. **895.** $\sqrt{50+\sqrt[3]{2}}$. **896.** $\sqrt[16]{\dfrac{43+5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[3]{17}}}$.

897. $\sqrt[3]{10-5{,}6\sqrt{3{,}5}}$.

Сложные проценты.

180. Основная задача на сложные проценты. Говорятъ, что капиталъ отданъ по **сложнымъ** процентамъ, если причитающіяся за него проц нтныя деньги не берутся изъ банка, а присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для наращенія ихъ процентами. Замѣтивъ это, предложимъ себѣ такую задачу:

Въ какую сумму обратится черезъ t лѣтъ капиталъ a рублей, отданный въ ростъ по p сложныхъ процентовъ?

Обозначимъ черезъ r ежегодную прибыль на 1 рубль, т.-е. положимъ $p/_{100}=r$; тогда черезъ 1 годъ каждый рубль капитала обратится въ $1+r$ руб. (напр., если капиталъ отданъ по 5%, то каждый рубль его черезъ годъ обратится въ $1+{}^5/_{100}$, т.-е. въ 1,05 рубля); слѣд., a рублей обратятся черезъ 1 годъ въ $a(1+r)$ руб. Еще черезъ годъ, т.-е. черезъ 2 года отъ начала роста, каждый рубль изъ этихъ $a(1+r)$ руб. обратится снова въ $1+r$ руб.; значитъ, весь капиталъ обратится въ $a(1+r)^2$ руб. Такимъ же образомъ найдемъ, что черезъ три года капиталъ будетъ $a(1+r)^3$, черезъ 4 года $a(1+r)^4$..., вообще черезъ t лѣтъ, если t цѣлое число, онъ обратится въ $a(1+r)^t$ руб. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ A окончательный капиталъ, будемъ имѣть слѣдующую **формулу сложныхъ процентовъ:**

$$A=a(1+r)^t.$$

Напримѣръ, если a=2300, p=5%, t=10, то найдемъ:

$$r=\frac{p}{100}=0{,}05;\quad A=2300(1{,}05)^{10}.$$

Чтобы вычислить A, пользуемся логариѳмами:

$$\log A = \log 2300 + 10 \log 1{,}05 = 3{,}36173 + 0{,}21190 = 3{,}57363$$

$$A = 3746{,}54 \text{ руб.}$$

181. По даннымъ тремъ изъ чиселъ: A, a, r и t **опредѣлить четвертое.** Формула сложныхъ процентовъ примѣнима и къ рѣшенію такихъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстно или a, или r, или t при прочихъ данныхъ числахъ. Такъ, изъ нея находимъ:

Для опредѣленія начальнаго капитала: $a = \frac{A}{(1+r)^t}$,

и слѣд., $\log a = \log A - t \log (1+r)$.

Для опредѣленія процента: $1+r = \sqrt[t]{\frac{A}{a}}$,

и слѣд., $\log (1+r) = \frac{1}{t} (\log A - \log a)$.

Вычисливъ по таблицамъ $1+r$, найдемъ потомъ r, т.-е. $p/_{100}$, а слѣд., и p.

Для опредѣленія времени будемъ имѣть:

$$\log A = \log a + t \log (1+r);$$

откуда: $t = \frac{\log A - \log a}{\log (1+r)}$.

Упражненія.

898. Въ какую сумму обратится капиталъ въ 4000 руб. черезъ 20 лѣтъ, если онъ отданъ по 4% (сложныхъ)?

899. Нѣкто, умирая, оставилъ наслѣдство въ 32000 руб., положенныхъ въ банкъ по 3% съ условіемъ, чтобы капиталъ съ процентами былъ раздѣленъ между наслѣдниками только черезъ 15 лѣтъ. Какую сумму придется дѣлить?

900. Населеніе города опредѣлено въ 250000 чел. Замѣтили, что оно увеличивается съ каждымъ годомъ на $^1/_{20}$ часть. Какое будетъ населеніе черезъ 100 лѣтъ, если увеличеніе постоянно будетъ слѣдовать этому закону?

901. Черезъ сколько лѣтъ капиталъ, отданный по 5% сложныхъ, удвоится? (Указаніе: начальный капиталъ x, окончательный $2x$; въ уравненіи x сокращается).

902. То же, если капиталъ отданъ по 4%.

903. Какой капиталъ надо отдать въ банкъ по 4%, чтобы черезъ 10 лѣтъ онъ обратился въ 45000 руб.?

904. По скольку процентовъ надо помѣстить капиталъ въ 7500 руб., чтобы онъ черезъ 6 лѣтъ обратился въ 10050 руб. 72 коп.?

905. Черезъ сколько лѣтъ капиталъ въ 6200 руб. обратится въ 8158 руб. 75 коп., считая по 4%?

906. Капиталъ въ 6000 руб. отданъ по 5% и въ концѣ каждаго года къ нему добавляютъ по 400 руб. Какая сумма образуется черезъ 10 лѣтъ. (Указаніе: составить формулы, показывающія, во что обратится капиталъ сначала въ концѣ 1-го года, потомъ въ концѣ 2-го года, затѣмъ 3-го и т. д. до 10-го).

907. Нѣкто занялъ 5000 руб., по 6%. Въ концѣ каждаго года онъ уплачиваетъ по 400 руб. Какой остался долгъ къ концу 6 года? (Указаніе: см. пред. задачу).

ОТВѢТЫ НА УПРАЖНЕНІЯ.

---

1. $\frac{apt}{100 \cdot 360}$. **2.** $\frac{ma+nb+pc}{a+b+c}$. **3.** $\frac{35 \cdot 8 \cdot 48}{360} = 37\frac{1}{3}$ руб.; $3500-37\frac{1}{3}$.

4. 1) $a+b+c$; 2) $m-n$; 3) pqr; 4) x^2, y^3; 5) $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{b}$; 6) x^2+y^2; 7) m^2n^3. **5.** 1) 99; 2) 561; 3) 11; 4) 3; 5) 1137; 6) 1089; 7) 689; 8) 3. **7.** 1) 38; 2) 5600. **8.** 1) a^2-b^2; 2) $(a-b)^2$; 3) $(a+b)(a-b)$; 4) $(a^3+b^3):(a+b)^3$. **9.** $3a+2b$; y; a^2x; $5a^2b^3$; $3ab$; a; $3a$; $5a^3b^2x^4$; $6x^2y$. $15ab$. **10.** $+10$; -10; $+3$; -3. **11.** $+8$; -2; $+1$; -3; **12.** $+1$; -1; -2; $+2$. **13.** 0; 0; 0; 0; 8; $\frac{3}{4}$; 2; 0,3; 0. **14.** $+2$; $-6\frac{1}{4}$.

15. $-5{,}7$; 0. **19.** -4; -15; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{29}{63}$. **20.** $-1{,}58$; $-\frac{1}{11}$. **21.** $-b$; $-y$. **22.** $b-a$; $35-40=-5$ (т.-е. получено убытку 5 руб.). **23.** $a-b$; -100. Послѣдній отвѣтъ означаетъ, что получается *недостатокъ* 100 руб. **24.** $m-n$; $200-250=-50$; этотъ отвѣтъ означаетъ, что лодка движется по теченію рѣки со скоростью 50 фут. въ мин. **25.** Черезъ 20 лѣтъ; черезъ—5 лѣтъ. Послѣдній отвѣтъ означаетъ: «5 лѣтъ тому назадъ». **26.** 14; 10; 18; 2. **27.** $a+b$; $m+n$; $5x$. **28.** 9; x; $2m$; a. **29.** $+16$. **30.** $+106$. **31.** $-1\frac{3}{4}$. **32.** 5. **33.** $10+(-2)+(-3)+7$. **34.** $10-(-8)$. **35.** $a-(-x)$. **36.** $a+(-b)+(-c)$. **37.** -16; -14; $+80$. **38.** $-\frac{187}{8}$; $-\frac{2}{25}$; $+\frac{21}{50}$. **39.** $+1$; -1; $+1$; -1. **40.** $+4$; -8; $+16$; -32. **41.** $3 \cdot 4^2+(-4) \cdot 4+(-5)=48-16-5=27$. **42.** $(-4)(-2)^2+3(-2)+(-5)=-16-6-5=-27$. **43.** 0; 0; 0; 0. **44.** -168. **45.** $-1{,}4$. **46.** $+3\frac{1}{16}$. **50.** 0; 0; 0; 0; невозм.; невозм.; невозм.; любое число. **51.** $+5$

—5; —5; +5. **52.** $-a$; —5; $+x^2$. **55.** $4x$; $3(a+b)$; $\frac{4m}{9}$; $3ab$; $2a^2x^3y$; $2ax-\frac{3b}{2}$. **56.** $aabbb+aabbb+aabbb$; $\frac{aa}{3}+\frac{aa}{3}$; $aa+aa+aa-$ $-\left(\frac{b}{4}+\frac{b}{4}+\frac{b}{4}\right)$. **57.** 90. **58.** $\frac{13}{15}$. **59.** $30\frac{1}{4}$. **60.** 0; 31; 160; 19431. **61.** 0; 0; 0. **62.** 829. **65.** $13a^2b$. **66.** $3\frac{11}{20}ax^3$. **67.** $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. **68.** $2x-16{,}3xy$. **69.** $A+3\frac{1}{2}mxy^2$. **70.** $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. **71.** $2ax-b^2x$. **72.** $0{,}25ab^3-4a^3b$. **73.** $4a^3-3a^2b-13ab^2$. **74.** $x^5-7a^2x^3$. **75.** $4x^7-$ $-4ax^6-2a^4x^3$. **76.** $A+x-y-z$. **77.** m^2+2n^3. **78.** $-2a+5b+3c$. **79.** $3m^2+n^2$. **80.** $8a^3-11a^2b+13ab^2-3b^3$. **81.** $2a^4+8a^3-4a^2+9a-6$. **82.** $7ax^3+2ab^2x-c^3-abcx-3c^2d$. **83.** $A-m+n+p$. **84.** $25-x$. **85.** $45-2a$. **86.** a^2-5b+c. **87.** $2a-5b+2c$. **88.** $-3a+3b$. **89.** $3ax^3-$ $-6ab^2x+3c^3$. **90.** $3a^3+a^2b+2ab^2+8c^3-b^3$. **91.** $3a^2+3b^2+3c^2$. **92.** $x+y$. **93.** $2m-2n$. **94.** $a-b+2c-d$. **95.** 1. **96.** $b-4c$. **97.** $2a-$ $-2b+2c$. **98.** $-9a^3+7ab^2-7b^3$. **99.** $4x^2-2y^2$. **100.** 1) $a-(b+c-d)$; 2) $a-b+(d-c)$; 3) $a-(b+c)+d$. **103.** a^9; a^{11}; a^{m+n}; $(2a)^7$. **104.** x^m; x^{2m-1}; y^{3m+1}. **105.** $15a^3b^7c$. **106.** $\frac{5}{8}a^4x^4$. **107.** $0{,}81a^3b^2x^{m+3}$. **108.** $a^6b^8c^3$. **109.** $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$. **110.** $0{,}01x^{2m}y^{2n+2}$. **111.** $8a^9b^3x^6$. **112.** $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. **113.** $-2a^7b^3c^2$. **114.** $+0{,}3x^4y^{m+1}$. **115.** $-35a^{m+1}b^{m+2}$. **116.** $+\frac{5}{14}m^4n^6y^4$. **117.** $+0{,}04a^6b^4$. **118.** $-8x^9y^6$. **119.** $8a-8b+8c$; $0{,}8m+0{,}8n-0{,}8p$; $\frac{23}{2}x-\frac{69}{4}y+\frac{23}{4}z$. **120.** $6a^3b-4ab^4+2abc$. **121.** $25a^3b-20a^4b^2+15a^5b^3-35a^6b^4$. **122.** $9a^5b-12a^4b^2+18a^3b^3-$ $-9a^2b^4$. **123.** $\frac{16}{105}a^7b^6c-\frac{20}{21}a^6b^7c$. **124.** Каждое изъ данныхъ выраженій, по раскрытіи скобокъ и приведеніи подобныхъ членовъ, даетъ: $x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2+x^2y$. **125.** $am+bm-cm-$ $-an-bn+cn$. **126.** $6a^2-3ab+2ab^2-b^3$. **127.** $2a^2+ab-ab-$ $-\frac{1}{2}b^2=2a^2-\frac{1}{2}b^2$. **128.** x^3-y^3. **129.** x^3+y^3. **130.** $49x^2-112xy+$ $+64y^2$; $0{,}09a^2x^4-0{,}3ax^2+\frac{1}{4}$. **131.** $\frac{1}{16}a^6x^2-a^5x^3+4a^4x^4$. **132.** $25a^3-$ $-5ab-22a^2b+10b^3$. **133.** $6x^5+x^4+7x^2-7x+1$. **134.** $(x^3+6x^2+$

$+24x+60)(x^3-6x^2+12x+12)=x^6+1008x+720$. **185.** $(16y^4+$ $+8xy^3+4x^2y^2-2x^3y+x^4)(-2y+x)=-32y^5+8x^3y^2-4x^4y+x^5$. **136.** $x^6-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. **137.** $a^4-2a^3x+2ax^3-x^4$. **138.** $6x^5-22x^4y+37x^3y^2-33x^2y^3+16xy^4-3y^5$. **139.** a^5+b^5. **140.** Высшій членъ a^5; низшій b^5; получаются умноженіемъ высшаго члена на высшій и низшаго на низшій. **141.** 10 членовъ; послѣ приведенія останутся 2 члена, потому что высшій и низшій члены не могутъ имѣть себѣ подобныхъ. **142.** m^2- $-n^2$; $(10+2)(10-2)=12 \cdot 8=96$ и $10^2-2^2=100-4=96$. **143.** a^2-1. **144.** $4a^2-25$. **145.** $9a^2x^4-\frac{1}{4}$. **146.** $1-a^4$. **147.** a^2-4b. **148.** $\frac{4}{9}a^2-\frac{4}{25}b^2$. **149.** $b^2-\frac{1}{4}$. **150.** $0{,}09x^4-100y^6$. **151.** $x^2+2xy+y^2$; $(3+2)^2=5^2=25$ и $3^2+2 \cdot 3 \cdot 2+2^2=9+12+4=25$; $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2=$ $=\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+12+4}{36}=\frac{25}{36}$. **152.** a^2+2a+1. **153.** $1+4a+4a^2$. **154.** $x^2+x+\frac{1}{4}$. **155.** $4x^2+12x+9$. **156.** $9a^4+6a^2+1$. **157.** $0{,}01x^{2m}+x^{m+1}+25x^2$. **158.** $16a^4b^2+$ $+4a^3b^3+\frac{1}{4}a^2b^4$. **159.** $0{,}64a^6x^2+1{,}2a^4x^3+\frac{9}{16}a^2x^4$. **160.** m^2-2mn+ $+n^2$; $(5-3)^2=2^2=4$ и $5^2-2 \cdot 5 \cdot 3+3^2=25-30+9=4$; $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2=$ $=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$. **161.** $25a^2-$ $-20a+4$. **162.** $9a^4b^2-3a^2b+\frac{1}{4}$. **163.** $9a^4b^2-24a^3bc+16a^2c^2$. **164.** $0{,}04x^6-\frac{3}{20}x^4+\frac{9}{64}x^2$. **165.** $4m^2+12mn+9n^2$. **166.** $8x^3-$ $-12x^2+6x-1$. **167.** $27a^6+108a^4b^2+144a^2b^4+64b^6$. **168.** $64a^6b^3-$ $-96a^5b^4+48a^4b^5-8a^3b^6$. **169.** $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1$. **170.** $(4x^2+$ $+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$. **171.** $(m+n)^2-p^2=m^2+2mn+n^2-p^2$. **172.** $a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$. **173.** $(a+b)^2-(c+d)^2=a^2+$ $+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$. **174.** $x=2(a^2+b^2)$. **175.** $y=4ab$. **176.** $2a^4$. **177.** $2x^2y$. **178.** $-17a$. **179.** $2a^5$. **180.** $5a^2b$. **181.** $2a^2xy$. **182.** $-\frac{3}{5}x^2$. **183.** $-5y^4$. **184.** $+\frac{1}{5}bx^2$. **185.** $\frac{3}{28}ac$. **186.** $-\frac{64}{15}x^2y$. **187.** $-\frac{6}{5}a^3$.

188. $6a^{m-2}x^2$. 189. $5(a+b)^2$. 190. $3a^mb^2$. 192. $9b-4c+$ $+5d$. 193. $\frac{16}{3}a+8b-16a^2b^4$. 194. $9x^2y^2-6axyz+a^2z^2$. 195. $x^4+2xy+y^2-z^2$. 196. $6x^3-4x^2+5x-2$. 197. x^2+ $+3x+2$. 198. $3ax$. 199. $7a^3-3a^2+5a-1$. 200. $x-a$. 201. x^2+ $ax+a^2$. 202. $x^3+ax^2+a^2x+a^3$. 203. Частное: $3a^3+4a^2+3a-3$, остатокъ: $-18a^2+19a-6$. 204. Частное: $2+3x$, остатокъ: $5x^2-17x^3$. 205. Частное: $2-3x+8x^2$, остатокъ: $-19x^3+20x^4$. 206. Частное: $x^4-2ax^3-4a^2x^2+3a^3x+4a^4$, остатокъ: $3a^5$; если въ дѣлимомъ вмѣсто x поставимъ a, то получимъ: a^5- $-3a^5-2a^5+7a^5+a^5-a^5=3a^5$. 207. Частное: $ax^3+(a+b)x^2+$ $+(a+b+c)x+(a+b+c+d)$, остатокъ: $a+b+c+d+e$. 208. $a(b+c)$. 209. $3(x+y-z)$. 210. $a(5a-3a^2+1)$. 211. $2a(2x-y)$. 212. $5a^2x(1-2x^2+8x)$. 213. $4ab^2(2abx-x^2+3b^2)$. 214. $xy(y-7+4x)$. 215. $x^m(1+2x-3x^2)$. 216. $2x^m(x^m-3+2x^{2m})$. 217. $4(a-b)x(a-b-3)$. 218. $(x-y)^2$, или $(y-x)^2$. 219. $(m+n)^2$. 220. $(a+b)^2$. 221. $(a-2b)^2$. 222. $(x+4)^2$. 223. $(x+1)^2$. 224. $(a-2)^2$. 225. $-(a-b)^2$. 226. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$. 227. $(a^2-b)^2$. 228. $(5x^2+3y)^2$. 229. $(0,1ab-1)^2$. 230. $5a(a-2b)^2$. 231. $[(x+1)+1]^2=(x+2)^2$. 232. $(a+b+2)^2$. 233. $(m+n)(m-n)$. 234. $(a+1)(a-1)$. 235. $(1+a)(1-a)$. 236. $(x+2)(x-2)$. 237. $(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$. 238. $(5b+3a)(5b-3a)$. 239. $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)$. 240. $(9x^2+5)(9x^2-5)$. 241. $(0,1a^3+3)(0,1a^3-3)$. 242. $(4ab^2c^3+$ $+3x^2y)(4ab^2c^3-3x^2y)$. 243. $3a(a^2+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$. 244. $(a+$ $+b+c)(a+b-c)$. 245. $(a+b+c)(a-b-c)$. 246. $(a+b-c)(a-b+c)$. 247. $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x.\ 2y=4xy$. 248. $(a^4+x^4)(a^2+$ $+x^2)(a+x)(a-x)$. 254. $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$. 255. $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$. 256. $(a+b-1)(a-b+1)$. 257. $(x+1+y)(x+1-y)$. 258. $(m+n+1)(m-n-1)$. 259. $(2a-b+$ $+c)(2a-b-c)$. 260. $(5x^2-y+3z^2)(5x^2-y-3z^2)$. 261. $(a+b)(x+y)$. 262. $(a-b)(c-d)$. 263. $(a-b)(x+y)$. 264. $(3+a)(x-y)$. 265. $(a+b)(a-1)$. 266. $(x-3)(z+y)$. 267. $(2a-3)^2(2a+3)$.

267.*a*. Напр., многочленъ задачи 251-й разлагается такъ: $a^3-8-(6a^2-12a)=a^3-2^3-6a(a-2)=(a-2)(a^2+2a+2^2)-$ $-6a(a-2)=(a-2)(a^2+2a+4-6a)+(a-2)(a^2-4a+4)=$ $=(a-2)(a-2)^2=(a-2)^3$. 268. $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{11m}$. 269. $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{100m}{236n}=\frac{25m}{59n}$.

270. $\frac{9ab}{10x^2}$. **271.** $\frac{14a^3}{11b}$. **272.** $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **273.** $\frac{20a^2+2a-1}{4a-4}$.
274. $\frac{18a-14}{6-a}$. **275.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$. **276.** $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$. **277.** $\frac{x-1}{x}$.
278. $\frac{3a^2}{b-a}$. **279.** $\frac{a-1}{b-2}$. **280.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$. **281.** $-\frac{3a}{6}$, $-\frac{5x^2}{3}$.
282. $-\frac{a-1}{6}$; $-\frac{a}{x-2}$. **283.** $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. **284.** $\frac{3b}{2x}$. **285.** $\frac{ac}{4b}$.
286. $\frac{16ay^3}{15}$. **287.** $\frac{3x^2yz}{4}$. **288.** $\frac{3xy}{4a^2}$. **289.** $\frac{b}{5ac}$. **290.** $\frac{a+x}{3b-cx}$.
291. $\frac{7x}{5b}$ **292.** $\frac{5a}{a-x}$. **293.** $\frac{n^2}{n-2}$. **294.** $\frac{3y}{4x}$. **295.** $\frac{x^2+a^2}{x}$.

296. Общ. знам. $=2abc$, числители: $4bc$, $6ac$, ab. **297.** Общ. знам.$=60a^2b^2x$; числители: $105b^2x^2$, $40a^3x$, $48a^2b^4$. **298.** Общ. знам.$=12a^2bcmx^2y$; числители: $20mx^3y^2$, $9a^3b^3c$. **299.** Общ. знам.$=x$, числители: $2ax$, a^2. **300.** Знаменатель: $40abx^3$, числители: $15x^3$, $120abx^4$, $8a^2b$. **301.** Знаменатель: a^2-b^2, числители: $a-b$, $a+b$. **302.** Общ. знам.$=(1-x^2)(1+2x)$; числители: $a(1+x)(1+2x)$, $b(1-x)(1+2x)$ и $c(1-x^2)$. **303.** Знам.$=8a^3b^2$; числители: $2a^2bx$, y. **304.** Знам.$=16mx^3y^2$; числители: a,$8(a+b)mx^2y$, $4(a-b)x^3$. **305.** Знам.$=m^2-1$; числ.: $m-1$, 2,$3(m+1)$. **306.** Знам.$=x^2-2x+1$; числ.: $3a(x-1)$, $2a$. **307.** Знам.$=a^2+4a+4$; числ.:$=a-1$; $(a-2)(a+2)$. **308.** Знам.$=(x-1)(2x-1)$; числ.: $2x-1$, $(2x-1)$, 1. **309.** Знам.$=(a+b)(a-b)b$; числ.:$=a^2-b^2$, $ab(a+b)$, $2a$. **310.** Знам.$=(a+b)^3$; числ.: a^3, $ab(a+b)$. $b(a+b)^2$. **311.** Знам.$=84a^3b^2$; числ.: $3x$, $4aby$. **312.** Знам.$=300a^3x^3y^2$; числ.: $12mxy$, $20a^2nx^2$, $5a^3py$. **313.** Знам.$=150a^2x^3y$; числ.: $3ay$, $20ax$, $2x^2y^2$, $45ax^4$. **314.** Знам.$=b(a^2-b^2)$; числ.: $(a-b)(a^2-b^2)$, $2ab(a+b)$, b. **315.** Знам.$=24(a+b)^2(a-b)c$; числ.: $4a(a-b)c$, $3(a+b)^2bc$, $2abc(a+b)$, $8a^2(a+b)^2$. **316.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$. **317.** $\frac{6+5x}{3x^2}$.
318. $\frac{az+by-cx}{xyz}$. **319.** $\frac{bx+a}{b}$. **320.** $\frac{413x-187a}{204}$. **321.** $\frac{1}{x-y}$.
322. $\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}$. **323.** $\frac{12x}{1-9x^2}$. **324.** $\frac{2x}{3}$. **325.** $\frac{4}{1-a^4}$.
326. $\frac{6}{x(x+1)(x+2)}$. **327.** $\frac{x-3}{x+3}$. **327**,*a*. $\frac{6a+20b+3a^2-9ab+6b^2}{a^2-4b^2}$.
327, *b*. $\frac{-6x^2-2x+8}{(x-1)^3}$, что послѣ сокращенія даетъ: $-\frac{2(3x+4)}{(x-1)^2}$.

327, c. $\frac{4a}{a^4+a^2+1}$. 328. $\frac{12x^2y^2}{p^2q^7}$. 329. $-\frac{6b}{7x^2}$. 330. $\frac{1}{5(1+a)x}$.
331. $\frac{(x+y)^2}{xy}$. 332. $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$. 333. $\frac{a(b-c)}{2(2b-c)}$. 334. $\frac{a^2b^2+2ab^3}{(a+b)^2}$.
335. $\frac{9b^2c^2x^2y}{16a^2z^2}$. 336. $\frac{3a^2}{5my}$. 337. $15a^2x^2y$. 338. $\frac{1}{5(a-b)}$.
339. $\frac{x+y}{x-y}$. 340. $\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$. 341. $\frac{b+c-a}{a+c-b}$. 342. b.
343. $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$. 344. $x=\frac{6}{5}$. 345. $x=50$. 346. $x=9$. 347. $x=\frac{5207}{2590}$.
348. $x=7$. 349. $x=4$. 350. $x=561\frac{15}{37}$. 351. $x=8$. 352. $x=5$.
353. $x=\frac{1}{5}$. 354. $x=\frac{d-b}{a-c}$. 355. $x=\frac{ab-1}{bc+d}$. 356. $x=3$.
357. $x=\frac{mn}{m-n}$. 358. $x=a$. 359. По упрощеніи получаемъ уравненіе $7x+16=7x+16$ или $0=0$, которое удовлетворяется всевозможными значеніями x. 360. 1°, получается нелѣпое равенство $0=66$; 2°, нелѣпое равенство $11=9$. Оба уравненія не удовлетворяются никакими значеніями x. 361. Равенства 1° и 3° суть тождества и, слѣд., удовлетворяются всевозможными значеніями x; равенства 2° и 4° суть уравненія; первое изъ нихъ имѣетъ корень $x=11$, второе $x={}^3/_2$.
362. 1368 и 1220. 363. 1400 и 400. 364. $\frac{7}{12}$. 365. 12600 руб, 366. 270 руб. 367. 6840 руб. 368. $x=5$. 369. 36 гусей.
370. $84\frac{7}{22}$ версты. 371. 6 дней. 372. Перваго сорта $31^1/_4$ бут., второго сорта $18^3/_4$ бут. 373. $^{12}/_{13}$ часа. 374. 120 арш. 375. $^4/_5$ часа. 376. 108. руб. 377. 12 дней. 378. 80 яицъ. 379. 90 руб. 380. 26. 381. 96. 382. 265. 383. Золота $7^{36}/_{47}$ фун. 384. $1^7/_8$ ведра. 386. Черезъ —4 дня (т.-е. 4 дня тому назадъ). 388. Черезъ $-^1/_4$ года (невозможная задача).
389. $x=16$, $y=35$. 390. $x=14$, $y=125$. 391. $x=9$, $y=123^1/_2$.
392. $x=320\frac{35}{52}$, $y=91\frac{5}{26}$. 393. $x=3$, $y=5$. 394. $x=2$, $y=1$.
395. $x=1$, $y=2$. 396. $x=4$, $y=6$. 397. $x=44$, $y=21$.
398. 500 руб. у A, 700 руб. у B. 399. 75 коп. и 55 коп.
400. $\frac{6}{25}$. 401. 5 руб. и 2 руб. 402. 121100 руб. 403. Фон-

таны влив. 15 и 6 вед. въ часъ. Весь бассейнъ нап. въ 10 час. **404.** Въ правой 10 мон., въ лѣвой 8. **504.** Капиталъ 5000 руб., проц. 2%. **406.** $x=12$, $y=25$, $z=6$. **407.** $x=13$, $y=24$, $z=62$. **408.** $x=4$, $y=0$, $z=5$. **409.** $x=10$, $y=24$, $z=25$. **410.** $x=17$, $y=22$, $z=45$. **411.** $x=2$, $y=4$, $z=1$, $u=5$. **412.** $x=1$, $y=10$, $z=-2$, $v=7$, $u=3$. **413.** $x=2$, $y=7$, $z=3$, $t=8$. **414.** $x=3$, $y=7$, $z=16$. **415.** $x=16$, $y=7\frac{3}{4}$, $z=5\frac{1}{2}$. **417.** $x=3$, $y=2$, $z=1$. **418.** $x=1$, $y=-{}^5/_6$, $z={}^2/_3$. **419.** 18 лѣтъ, 38 лѣтъ, 62 года. **420.** 400 руб., 640 руб. и 780 руб. **421.** Фунтъ кофе стоитъ $\frac{3}{4}$ руб., фунтъ сахару $\frac{1}{5}$ руб. и фунтъ чаю 2 руб. **422.** Искомое число есть 432. **423.** *A* окончилъ бы въ 20 дней, *B* въ 30 дней и *C* въ 60 дней; работая вмѣстѣ, они окончатъ работу въ 10 дней. **424.** 3 фун., 12 фун. и 4 фун. **425.** 133 фун., 150 фун. и 76 фун. **426.** $\frac{13}{8}a$, $\frac{7}{8}a$ и $\frac{1}{2}a$. **427.** Потому что число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ. Чтобы найти нѣсколько рѣшеній этихъ системъ, подставляемъ въ первой изъ нихъ на мѣсто одного неизвѣстнаго, а во второй на мѣсто двухъ неизвѣстныхъ, произвольныя числа и рѣшаемъ образовавшіяся системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Если, напр., положимъ въ первой системѣ $z=1$, то получимъ

$$\begin{array}{r} 7x-2y=32 \\ x+10y=17 \end{array} \quad \text{откуда } x=\frac{59}{12},\ y=\frac{29}{24}.$$

Если во второй системѣ положимъ $z=1$, $t=0$, то будемъ имѣть

$$\begin{array}{r} 5x-y=-1 \\ 3x+2y=21 \end{array} \quad \text{откуда: } x=\frac{19}{13},\ y=\frac{108}{13} \text{ и т. д.}$$

428. Первая система невозможна; вторая возможна (имѣетъ рѣшеніе: $x=5$, $y=3$). **429.** $20a-b=29$. **430.** Система неопредѣленная, такъ какъ второе уравненіе приводится къ одному виду съ первымъ. **431.** Система невозможна, такъ какъ она приводится къ противорѣчащимъ уравненіямъ: $5x-5y=312$ и $x-y=-24$. **432.** Система невозможна, такъ какъ въ 3-мъ уравненіи лѣвая часть есть сумма лѣвыхъ частей первыхъ двухъ уравненій, а правая часть не равна суммѣ правыхъ частей этихъ уравненій. **433.** Система неопредѣленна, такъ какъ 3-е уравненіе есть слѣдствіе первыхъ двухъ (получается

изъ нихъ сложеніемъ). **434.** +1; —1; +1; —1; +1. **435.** —8; +16; —32. **436.** $-a^3$; $+a^6$; $+a^8$. **437.** —1; +1; +1.

438. m^2n^2; $8x^3y^3$; $+\frac{1}{16}a^4x^4y^4$. **439.** a^6; $-a^{12}$; $+a^{12}$; x^{mn}.

440. $-a^{24}$. **441.** $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{a^5}{b^5}$; $+\frac{x^4}{y^4}$; 0,0081. **442.** $4a^6b^6c^2$. **443.** $\frac{8}{27}a^{12}x^6$.

444. $0{,}008a^3b^9x^{12}$. **445.** $+0{,}0001x^{4m}y^4$. **446.** $\frac{9a^2x^6}{25b^4y^2}$.

447. $-\frac{64a^6m^3n^9}{27b^3x^{12}}$. **448.** $\frac{4(a+b)^2x^{10}}{49a^6b^2y^4}$. **449.** $4a^4-2a^3+4\frac{1}{4}a^2-a+1$.

450. $\frac{1}{4}x^4-4x^3+13x^2+24x+9$. **451.** $25a^6x^2-30a^5x^3+19a^4x^4-36a^3x^5+19a^2x^6-6ax^7+9x^8$. **452.** $0{,}09x^6-0{,}06x^5-0{,}44x^4+\frac{37}{80}x^2-\frac{3}{4}x+0{,}25$. **453.** $\frac{9}{25}a^6b^2-\frac{4}{5}a^5b^3+\frac{128}{45}a^4b^4-\frac{227}{75}a^3b^5+4\frac{2}{5}a^2b^6-1{,}2ab^7+0{,}09b^8$. **457.** —3; +3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0,1; —0,1.

458. ±3; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm0{,}1$; ±5; ±10; ±2; $\pm\frac{1}{2}$; ±3. **459.** Всѣ 4 корня мнимыя числа. **460.** $\pm2\,.\,3$. **461.** $\pm\frac{1}{2}\,.\,0{,}1\,.\,5$.

462. $\pm2\sqrt{a}\sqrt{b}$. **463.** $\pm3ax\sqrt{y}$. **464.** $-3a\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}$.

465. $\pm\frac{1}{2}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{x}$. **466.** $\sqrt[5]{a}\sqrt[5]{b}\sqrt[5]{c}\sqrt[5]{d}$. **467.** $\pm a^2$; $\pm2^2$; $\mp x^3$; $\pm(a+b)^4$. **468.** 2^2; $-a^2$; x^4; $(m+n)^3$. **469.** a^m; x^2.

470. x^{5m}; a^3. **471.** $\pm\frac{3}{5}$. **472.** Мнимое число. **473.** $\pm\frac{a}{b^2}$.

474. $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{m-n}}$. **475.** $\frac{2}{5}$. **476.** —0,3. **477.** $\frac{a^2}{b}$. **478.** $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.

479. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. **480.** $\frac{a}{\sqrt{b}}$ **481.** $\frac{a^3}{b^4}$. **482.** $\pm5a^3bc^6$. **483.** $\pm0{,}6x^2yz^m$.

484. $\frac{1}{2}a^3(b+c)^3$. **485.** $-0{,}1x^4y$. **486.** $5(a+b)^2(c+d)$. **487.** $\pm\frac{3ab^2}{5x^3y}$.

488. $\pm\frac{0{,}1a^2b^3c}{7m^6n^p}$. **489.** $-\frac{3a^3b^2}{xy^4}$. **490.** $\frac{2(a+b)^2c}{x^4}$. **491.** $2a\sqrt{a}$.

492. $2a^6b^4\sqrt{2b}$. **493.** $5a^3bx^2\sqrt{2abx}$. **494.** $2a\sqrt[3]{2a}$. **495.** $-3x\sqrt[3]{3x^2y^2}$.

496. $7(a+b)\sqrt{2(a+b)x}$. **497.** $(m-n)xy^2\sqrt[3]{(m-n)^2xy}$. **498.** $\sqrt{8}$.

499. $\sqrt{3}$. **500.** $\sqrt{a^3}$. **501.** $\sqrt{2a^2b^2}$. **502.** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}a}$. **503.** $\sqrt[3]{24a^7b^5}$. **504.** $\sqrt{(a+b)^3}$. **505.** $\sqrt{2a^3(x-y)^5}$. **506.** 65. **507.** 17. **508.** 247. **509.** 763. **510.** 978. **511.** 7563. **512.** 8276. **513.** 534762. **514.** 6950078. **515.** 3 или 4. **516.** 3,6 или 3,7. **517.** 3,605 или 3,606. **518.** 6 или 7. **519.** 15 или 16. **520.** 10,04 или 10,05. **521.** 0,89 или 0,90. **522.** 0,942 или 0,943. **523.** 1,80 или 1,81. **524.** 0,5 или 0,6; 0,50 или 0,51. **525.** 4,11 или 4,12. **526.** 18,867... **527.** $\frac{3}{5}$ или $\frac{4}{5}$ $\left(\text{до } \frac{1}{5}\right)$; $\frac{8}{11}$ или $\frac{9}{11}$ $\left(\text{до } \frac{1}{11}\right)$. **528.** $\frac{3}{6}$ или $\frac{4}{6}$ $\left(\text{до } \frac{1}{6}\right)$; $\frac{8}{50}$ или $\frac{9}{50}$ $\left(\text{до } \frac{1}{50}\right)$. **529.** $\frac{5}{10}$ или $\frac{6}{10}$ $\left(\text{до } \frac{1}{10}\right)$; 2,3 или 2,4. (до 0,1). **530.** 1,46 или 1,47 (до 0,01). **531.** 0,051 или 0,052 (до 0,001). **532.** $x=\pm 7$. **533.** $x=\pm 3$. **534.** Корни мнимые. **535.** $x=\pm 9$. **536.** $x=\pm 9$. **537.** $x_1=0$; $x_2=\frac{7}{2}$. **538.** $x_1=0$, $x_2=-\frac{7}{3}$. **539.** $x_1=0$, $x_2=3\frac{3}{4}$. **540.** $x=0$. **541.** $x=0$. **542.** $x=0$. **543.** $x_1=2$, $x_2=3$. **544.** $x_1=12$, $x_2=-4$. **545.** $x_1=3$, $x_2=-9$. **546.** $x=\frac{32\pm\sqrt{1681}}{8}$; $x_1=8$, $x_2=-2\frac{1}{4}$. **547.** $x=4\pm\sqrt{30}=4\pm 5{,}477\ldots$; $x_1=9{,}477\ldots$; $x_2=-1{,}477$. **548.** $x=\frac{24}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2-21\frac{15}{16}}$; $x_1=5\frac{17}{20}$, $x_2=3\frac{3}{4}$. **549.** $x=4$. **550.** $x_1=44$, $x_2=-2$. **551.** $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$. **552.** $x_1=7$, $x_2=\frac{2}{5}$. **553.** $x=-\frac{2}{3}$. **554.** $x_1=6\frac{3}{7}$, $x_2=3\frac{1}{4}$. **555.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-3$. **556.** $x_1=14$, $x_2=-10$. **557.** $x=\frac{860\pm 752}{24}$; $x_1=67\frac{1}{6}$, $x_2=4\frac{1}{2}$. **558.** 8 и —9. **559.** —1 и —1. **560.** +1 и +2. **561.** $\frac{5}{3}$ и 2. **562.** 4 и —2. **563.** $x^2-5x+6=0$; $x^2+x-6=0$; $x^2-x-6=0$; $x^2+5x+6=0$. **564.** $x^2-6x+\frac{35}{4}=0$; $x^2+x-\frac{35}{4}=0$; $x^2+6x+\frac{35}{4}=0$. **565.** $x^2-4=0$. **566.** $x^2-6x+9=0$. **567.** $x^2+6x+9=0$. **568.** $x^2-10x=0$; $x^2+10x=0$. **569.** $x^2-6x+4=0$. **570.** $x^2-4x+7=0$. **571.** $x^2-(a+b)x+ab=0$.

572. $x^2-(a-b)x-ab=0$. **573.** $x^2+(a+b)x+ab=0$. **574.** 50 и 15 или —50 и —15. **575.** 12 и 20 или —20 и —12. **576.** 18. и —17. **577.** 12 платковъ. **578.** 54 бѣдн. **579.** 8 мужч. и 12 женщ. **580.** 15 арш. и 18 арш. или же 5 арш. и 8 арш. **581.** 10 вер. и 9 вер. въ часъ. **582.** Или 60 руб., или 40 руб. **583.** 4 руб., 20 руб. **584.** Два рѣшенія: 72 зол. или 24 зол. **585.** 30 лѣтъ (рѣшеніе 70 лѣтъ не годится, такъ какъ въ задачѣ сказано: «молодая женщина»). **586.** 24. часа, 25 верстъ въ часъ; или 20 часовъ, 30 вер. въ часъ. **587.** 4 часа, 6 час. **588.** *A* въ 1 часъ, *B* въ 2 ч. 40 мин. дня. **615.** 119. **616.** 88. **617.** 7 членовъ. **618.** Послѣдняя уплата 54 руб., число уплатъ 15. **619.** Черезъ 6 дней. **620.** $\frac{5}{7}$. **621.** $\frac{2}{3}$. **622.** 3 р. 45 к.; всего уплатили 40 р. 50 к. **623.** $4\frac{77869}{78125}$. **624.** 4. **625.** Выгоднѣе предложеніе 2-го покупателя на 1132 р. **626.** 9, 27, 81, 243; или —18; +54, —162, +486. **627.** 13286 р. **628.** Первый членъ $=\frac{5}{2}$, знам. $=2$. **629.** Число зеренъ равно $2^{64}-1$, что составляетъ 18 446 744 073 709 551 615. **630.** $x=1$. **631.** $x=2$. **632.** $x=9$. **633.** $x=3$. **634.** Посторонній корень $x=\frac{1}{3}$, удовлетворяющій уравненію $2-\sqrt{3x}=1$. **635.** Посторонніе корни: $x_1=4$, $x_2=3$, удовлетворяющіе уравненію $x+\sqrt{25-x^2}=7$. **636.** $x_1=4$, $x_2=3$. **637.** $x=-3$; корень $x=4$ посторонній. **638.** Посторонніе корни: $x_1=12$, $x_2=5$. **639.** $x_2=12$, $x_1=5$. **640.** $x=49$. **641.** $x=8$. **642.** $x_2=5$. **643.** $x_1=24$; корень $x_2=840$ посторонній, удовлетворяющій уравненію: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=12$. **644.** $x_1=+2$, $x_2=-2$, $x_3=+1$, $x_4=-1$. **645.** ±3, ±1. **646.** $\pm\sqrt{3}$. **647.** ±3. $\pm\sqrt{-1}$. **648.** $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{-1}$. **649.** ±2, $\sqrt{-\frac{1}{2}}$. **650.** ±2, корни $x=\pm\sqrt{-1}$ посторонніе. **651.** 1) q должно быть положительное число, меньшее 4; 2) q должно быть отриц. число; 3) q должно быть полож. число, большее 4; 4) $q=4$; 5) $q=0$. **652.** $x=4+\sqrt{32}$, $y=-4+\sqrt{32}$; или $x=4-\sqrt{32}$, $y=-4-\sqrt{32}$. **653.** $x=15\frac{1}{6}$, $y=9\frac{1}{6}$. **654.** $x=2$, $y=4$; или $x=-2$, $y=-4$.

655. $x_1=5$, $y_1=3$, или $x_2=3$, $y_2=5$. **656.** $x_1=4$, $y_1=2$; или $x_2=1$, $y_2=4$. **657.** $x=\frac{9\pm\sqrt{57}}{6}$, $y=\frac{-6\mp\sqrt{57}}{3}$. **658.** $x=1$, $y=2$. **659.** $x_1=1$, $y_1=5$; $x_2=-\frac{47}{287}$, $y_2=-\frac{1237}{287}$. **660.** Для x получаются 4 значенія: 7, —7, 4 и —4; соотвѣтственно этимъ значеніямъ y будетъ :4, —4, 7 и —7. **661.** $x=\frac{b\pm\sqrt{2ab-a^2}}{2}$, $y=\frac{b\mp\sqrt{2ab-a^2}}{2}$. **684.** $\sqrt{x}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)\sqrt{a+b}$.

685. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$. **686.** $\sqrt[3]{3a^2b^4}=b\sqrt[3]{3a^2b}$. **687.** $ab\sqrt{2b}$. **688.** $\sqrt[3]{11a^2b^2}$. **689.** $\sqrt[5]{2ab^4c^{10}}=c^2\sqrt[5]{2ab^4}$. **690.** $b\sqrt{12ab}$. **691.** $\sqrt[12]{2a}$ и $\sqrt[12]{a^8}$. **692.** $\sqrt[30]{x^{15}}$, $\sqrt[30]{y^{10}}$, $\sqrt[30]{z^6}$. **693.** $\sqrt[6]{a^4}$, $\sqrt[6]{a}$. **694.** $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{25}$. **695.** $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[12]{27}$. **696.** $\sqrt[30]{3^{15}}$, $\sqrt[30]{4^6}$, $\sqrt[30]{12^5}$. **697.** $\sqrt[10]{\frac{1}{32}}$, $\sqrt[10]{\frac{25}{9}}$, $\sqrt[10]{\frac{1}{3}}$. **698.** $\sqrt[36]{y^{12}z^6}$, $\sqrt[36]{y^3z^6}$, $\sqrt[36]{y^4z^2}$. **699.** $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. **700.** $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

701. $\sqrt[3]{4}$, $4\sqrt[3]{4}$, $3\sqrt[3]{4}$. **702.** $\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}$, $\frac{4}{5}\sqrt[3]{25}$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{25}$. **703.** $a\sqrt{ax}$, $x\sqrt{ax}$, $\sqrt{xa}$, **704.** $3ax\sqrt[3]{2ax}$, $2a^2x\sqrt[3]{2ax}$, $\sqrt[3]{2ax}$, **705.** $\frac{1}{x}\sqrt{ax}$, $\frac{1}{3a}\sqrt{ax}$, $x\sqrt{ax}$, $0{,}5\sqrt{ax}$. **706.** $\frac{x}{a}\sqrt{ab}$, $\frac{x^2}{b}\sqrt{ab}$, $\frac{x^3}{ab}\sqrt{ab}$. **707.** $8\sqrt{2}$. **708.** $-13\sqrt{3}$. **709.** $1\frac{13}{15}\sqrt{15}$. **710.** $(2a^2b+ab)\sqrt{2ab}-3\sqrt{ab}$. **711.** $2p^3x\sqrt[3]{2px}$. **712.** $4\sqrt[3]{a^2}+3\sqrt[3]{a}$. **713.** $8a\sqrt[3]{2a^2}$. **714.** $-a\sqrt{1+x^2}$. **715.** $3\sqrt[3]{4}$. **716.** 15. **717.** $180\sqrt[6]{25}$. **718.** $6a^3$. **719.** $\frac{16x}{a}$. **720.** $4ab^3$. **721.** $\sqrt[6]{6750}$. **722.** $2\sqrt[12]{81}$. **723.** $\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{6}}$. **724.** $8x^6\sqrt[8]{24x}$. **725.** $\sqrt[6]{2}$. **726.** $\sqrt{40a^2}=$

$=2a\sqrt{10}$. **727.** $6\sqrt[4]{\frac{9}{10}a}=0,6\sqrt[4]{9000a}$. **728.** $2a\sqrt{2a}$. **729.** $10\sqrt[3]{xz^9}=$
$=10z^3\sqrt[3]{x}$. **730.** $\sqrt[6]{x}$. **731.** $\sqrt[6]{128}=2\sqrt[6]{2}$. **732.** $4a\sqrt[6]{9m^2n}$.
733. $\frac{1}{4}ab\sqrt{2ab}$. **734.** $a\sqrt[3]{16ax^2}=2a\sqrt[3]{2ax^2}$. **735.** $9a^4x^2\sqrt[3]{(a+b)^2}$.
736. $(1+x)\sqrt{1+x}$. **737.** x^9. **738.** $81a^6b^9\sqrt[3]{a^2b}$. **739.** $\sqrt[4]{\left(\frac{2a}{1+a}\right)^3}$.
740. $\sqrt[3]{3ax}$. **741.** $\sqrt{a}$. **742.** $-0,001a^7x^4$. **743.** $\frac{2}{81}ax^{4m+1}$.
744. $\sqrt[6]{a}$. **745.** $\sqrt[8]{a}$. **746.** $\sqrt[6]{ab}$. **747.** $\sqrt[6]{12}$. **748.** $\sqrt[4]{a^3}$. **749.** $\sqrt[8]{a^7}$.
750. $\sqrt[6]{a^3}=\sqrt{a}$. **751.** $\sqrt[8]{\frac{1}{16}a^7x^4}$. **752.** $\sqrt{5}=2,23\ldots$ **753.** $\sqrt{12}=3,46\ldots$
754. $\sqrt{8}=2,82\ldots$ **755.** $\sqrt[3]{\sqrt{117649}}=\sqrt[3]{343}=7$. **756.** $5-2\sqrt{6}$.
757. $\sqrt[3]{a^2}-4$. **758.** $2a+2\sqrt{a^2-x^2}$. **759.** $\frac{1}{2}$. **760.** 2. **761.** $8\sqrt{6}-18$.
762. $4a+12\sqrt{ab}+9b-2\sqrt{ac}-3\sqrt{bc}+\frac{1}{4}c$. **763.** -12. **764.** $\frac{4x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$.
765. $\frac{1}{1-x^2}$. **766.** a^{-3}; x^{-2}; $(a+1)^{-1}$. **767.** x^{-1}; x^{-3}; $(1+x)^{-2}$.
768. $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$. **769.** -1; $\frac{1}{4}$. **770.** 8; 100. **771.** $\frac{8}{125}$; $\frac{10000}{81}$.
772. $a^{-2}b^{-1}$; $2a^{-3}b^{-4}$. **773.** $\frac{1}{2}ax^{-1}$; $\frac{1}{3}a^{-1}xy^{-2}z^{-3}$. **774.** $a(a+x)^{-1}$;
$2a(a-x)^{-1}$. **775.** $3ab(1+x)^{-2}(1-x)^{-3}$. **776.** $a^0=1$; x; x^{-1}. **777.** $14a^4b^2$.
778. $9a^0x^0y^3=9y^3$. **779.** $35(a+b)^{-1}$. **780.** a^9; x^{-3}. **781.** x^2; x^{-4}.
782. $2a^2b^3$. **783.** $5ab^{-4}x^{-1}$. **784.** a^{-8}; a^{-8}; a^8. **785** $4a^4b^{-6}$.
786. $4x^6y^4$. **787.** $27(1-x)^{-6}(1+x)^6$. **788.** $\frac{a^{-4}x^2}{b^2y^{-8}}$. **789.** a^{-4}; x^{-2};
$(a+b)^{-1}$. **790.** $2a^{-1}b^2c^{-3}$. **791.** $3x^{-1}y^{-2}z^6$. **792.** $\frac{2^6b^{12}c^{18}x^{12}y^6}{3^6a^{18}}$.
793. $\frac{3y}{ax^2}$. **794.** $4a^{-2}-1$. **795.** $a^{-4}-2a^{-2}+1$. **796.** $4(a+x)^{-6}y^{10}z^{-4}$.
797. $\frac{25}{49}a^{-4}b^3m^{-1}n^{-1}$. **798.** $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{1}{2}}$. **799.** $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}$. **800.** $(a+b)^{\frac{1}{2}}$,

$(1+x)^{\frac{1}{3}}$, $(1+x)^{\frac{2}{3}}$. **801.** $a^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{5}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$. **802.** $(2ab)^{\frac{1}{3}}$. **803.** $(3a)^{2}$. $(2a)^{\frac{1}{3}}$. **804.** $4(2a)^{\frac{1}{2}}$, $(6b^{2}x^{-1})^{\frac{1}{3}}$. **805.** $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^{2}}$. **806.** $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}, \frac{1}{\sqrt[3]{a^{2}}}$.

807. $\sqrt[3]{1+x}$, $\sqrt[3]{(1+x^{2})}$. **808.** $\sqrt{3\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{(1+x)^{2}}}$. **810.** $x^{\frac{7}{6}}$.

811. $a^{\frac{15}{4}}$ **812.** $a^{\frac{13}{6}}$. **813.** $\frac{5a^{\frac{5}{6}}x}{3y}$. **814.** $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{4}}$. **815.** $\frac{5}{2}(a-1)^{\frac{1}{3}}$.

816. $5ac^{-\frac{1}{12}}$. **817.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{3a}^{\,-\frac{1}{3}}b^{-\frac{8}{3}}$. **818.** $a^{\frac{2}{3}}$; $a^{-\frac{3}{2}}$; $a^{\frac{3}{8}}$ **819.** a, a.

820. $2ab^{\frac{1}{3}}$. **821.** $3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}$. **822.** $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{-\frac{1}{6}}$. **823.** $(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

824. $(a+b)^{-\frac{1}{6}}$. **825.** $2a^{-\frac{1}{8}}b^{0,1}$. **826.** $a+b-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. **827.** $x^{\frac{4}{3}}-$ $-x^{\frac{2}{3}}$. **828.** $4a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}b$. **829.** $x^{-1}+2x^{-\frac{5}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}-2x^{0}-2x^{\frac{1}{6}}+x$.

830. $a^{\frac{1}{3}}b^{12}c^{-\frac{8}{3}}d^{-\frac{4}{3}}(a+b)^{2}$. **831.** $\log_{10}1=0$; $\log_{10}10=1$; $\log_{10}100=2$; $\log_{10}0,1=-2$; $\log_{a}N=x$. **832.** $1000=10^{3}$; $0,001=10^{-3}$; $4=16^{\frac{1}{2}}$; $P=a^{y}$. **833.** 1, 2, -1, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$. **834.** 1, 2, 3, 4; -1, -2, -3, -4. **835.** 12; 0; 4; 3; 1; 1; $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. **836.** $2\log a+3\log b$. **837.** $\log 5+3\log a+$ $+2\log x$. **838.** $8(\log m+\log n)$. **839.** $\log 2+2\log a-\log 3-$ $-3\log b$. **840.** $\log 4+3\log a-3\log b-\log 5-\log m-\frac{1}{2}\log n$ $-\frac{1}{2}\log x$. **841.** $\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. **842.** $\frac{1}{3}(\log 7+3\log a+\log b)$.

843. $\log 4+\frac{1}{5}(\log 2+\log a+3\log b)$. **844.** $\log 7+3\log a+\log b+$ $+\frac{1}{3}\log c$. **845.** $\frac{1}{2}(\log 10+\log a+\frac{2}{3}\log b)$. **846.** $\frac{1}{2}[\log a+\frac{1}{3}(\log b+$ $+\frac{1}{2}\log c)]=\frac{1}{2}\log a+\frac{1}{6}\log b+\frac{1}{12}\log c$. **847.** $2\log a+\frac{1}{2}(\log 2+\log b)-$ $-\log 8-3\log x-2\log y$. **848.** $\log(a+b)+\log(a-b)$.

849. $2\log(a-b)$. **850.** $x=ab$. **851.** $x=\frac{a}{b}$. **852.** $x=a^{2}$.

853. $x=\frac{a^2b^3}{c}$. **854.** $x=\sqrt{a}$. **855.** $x=\sqrt[3]{ab}$. **856.** $x=\sqrt{a\sqrt{b\sqrt[3]{c^2}}}$.

857. 0, 1, 2, 3; 0; 8; 1; 4; 1, 1, 3. **858.** $\bar{3}$,62195; $\bar{2}$,92620; $\bar{1}$,99660; $\bar{6}$,44000. **859.** —1,26436; —0,91963; —3,92370; —0,99770. **860.** —1, —2, —3, —5, —7. **861.** $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$. **862.** 0,95424; 1,41497; 2,75815; 1,76005; 0,87005; $\bar{1}$,87961. **863.** 4,75008. **864.** 1,00015. **865.** $\bar{2}$,57803.
866. 737, 3; 22, 37; 1,026; 1384. **867.** 46,0077... **868.** 204,857...
869. 3,23653... **870.** 0,380733... **871.** 5580, 875. **872.** 0,082514.
873. 0,231873... **874.** 0,000122066... **875.** $\bar{4}$,69924; 0,41649.
876. $\bar{4}$,29302; 1,62667. **887.** $\bar{9}$,18203. **878.** $\bar{6}$,61665.
879. $\overline{88}$,20320. **880.** $\bar{6}$,68208. **881.** 4,87773. **882.** 56,11310.
883. $\bar{3}$,15775. **884.** $\bar{1}$,40549. **885.** $\bar{1}$,83391. **886.** $\bar{1}$,78678.
887. 2,48544. **888.** 0,933125. **889.** 26,0641. **890.** 11767,8.
891. 1,54. **892.** 1937,23. **893.** —1678,65. **894.** —3,2573.
895. 7,15966... **896.** 1,23531. **897.** —0,78106. **898.** 8763 р. 20 к.
899. 49860 р. **900.** 32880700 чел. **901.** Въ 14 съ небольшимъ лѣтъ. **902.** Около $17\frac{1}{2}$ лѣтъ. **903.** 30402 р. **904.** По 5%. **905.** Черезъ 7 лѣтъ. **906.** Образуется сумма рублей: $6000 \cdot 1{,}05^{10}+400(1{,}05^9+1{,}05^8+1{,}05^7+\ldots+1)=$ $=6000 \cdot 0{,}05^{10}+400 \cdot \frac{1{,}05^{10}—}{0{,}05}$, что составитъ 15804 р.

907. Къ концу 6-го года долгъ будетъ $5000 \cdot 1{,}06^6 —$ $—400(1{,}06^5+1{,}06^4+\ldots+1)=5000 \cdot 1{,}06^6—400 \cdot \frac{1{,}06^6—1}{0{,}06}$, что составитъ 9883 р.